Übungen zum EF Physik des 20. Jahrhunderts

Serie 2: Quantitative Vorbereitung zum Versuch von Michelson und Morley (1887) – LÖSUNGEN

1. *Mehr Beispiele zur relativistischen Geschwindigkeitsaddition*

   (a) Nach der klassischen Physik beträgt die Geschwindigkeit der Kugel im Strassensystem

$$u = u' + v = \frac{1}{2}\,c + \frac{1}{3}\,c = \frac{5}{6}\,c = \frac{10}{12}\,c$$

und ist damit grösser als die Fluchtgeschwindigkeit der Banditen mit $\frac{3}{4}\,c = \frac{9}{12}\,c$.
Relativistisch korrekt beträgt die Geschwindigkeit der Kugel im Strassensystem jedoch "nur"

$$u = \frac{u'+v}{1+\frac{u'v}{c^2}} = \frac{\frac{5}{6}\,c}{1+\dfrac{\frac{1}{2}\,c\cdot\frac{1}{3}\,c}{c^2}} = \frac{\frac{5}{6}\,c}{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}\,c}{\frac{7}{6}} = \frac{5}{7}\,c = \frac{20}{28}\,c < \frac{21}{28}\,c = \frac{3}{4}\,c$$

D.h., die Kugel kommt den Banditen nicht nach.

   (b) In $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ betragen die beiden Geschwindigkeiten:

$$u' = 100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 27.78\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \text{und} \qquad v = 250\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 69.44\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Für die klassische Geschwindigkeit des Boliden im Strassensystem erhalten wir so:

$$u = u' + v = 100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} + 250\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 350\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 97.22\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Genau den gleichen Wert lesen wir im TR-Display ab, wenn wir relativistisch rechnen. Das lässt sich auch gut verstehen, denn für den Korrekturterm im Nenner der relativistischen Geschwindigkeitsaddition ergibt sich:

$$\frac{u'\cdot v}{c^2} = \frac{27.78\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 69.44\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{\left(3.00\cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)} = 2.143\cdot 10^{-14}$$

Dieser Korrekturterm ist dermassen klein, dass wir bei der Eingabe im Taschenrechner durch ihn keinerlei Effekt sehen, weil er im Nenner zu 1 hinzuaddiert wird. Effektiv scheint es uns zunächst einmal unmöglich, die relativistische korrekte Geschwindigkeit bei dieser Aufgabe mit dem TR irgendwie zu beziffern. Wir können nur sagen, dass die Korrektur extrem klein ist und bei alltäglichen Geschwindigkeiten absolut keine Rolle spielt.

Für die Mathematik und die Physik ist eine derartige scheinbare "Unberechenbarkeit" oder "Unbezifferbarkeit" allerdings unbefriedigend. Daher werden wir nun einen Trick anwenden, den wir in der nächsten Übungsserie noch etwas genauer unter die Lupe nehmen und der auch Aufgabe 6 dieser Übungsserie zum Zug kommt.

In der höheren Analysis ist es Gang und Gäbe, dass Bereiche komplizierter Funktionen mit einfacheren Funktionen *approximiert*, also nur näherungsweise angegeben werden. Solche Approximationen klingen im ersten Moment vielleicht unbefriedigend – ist das nicht ungenau?! – sie sind aber sehr präzise, wenn ich weiss, in welchem Variablenbereich ich eine gegebene komplizierte Funktion vereinfachen möchte.

Die zu diesen Annäherungen verwendete Mathematik nennt sich *Potenzreihenentwicklung* oder *Taylorreihenentwicklung*. Damit können wir z.B. die Funktion $\frac{1}{1+x}$ für sehr kleine Werte von x, d.h. für $|x| \ll 1$ resp. $x \approx 0$, sehr gut annähern durch:

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x \qquad \text{für} \quad |x| \ll 1$$

Diese Annäherung erlaubt uns, die relativistische Geschwindigkeitsaddition bei kleinen Geschwindigkeiten anders zu notieren ($x = \frac{u'v}{c^2} \ll 1$):

$$u = \frac{u'+v}{1+\frac{u'v}{c^2}} = (u'+v)\cdot\frac{1}{1+\frac{u'v}{c^2}} \approx (u'+v)\cdot\left(1-\frac{u'v}{c^2}\right) = \underbrace{u'+v}_{u_{\text{klass}}} - \underbrace{(u'+v)\cdot\frac{u'v}{c^2}}_{\Delta u_{\text{rel}}}$$

$u_{\text{klass}} = u'+v$ bezeichnet die Geschwindigkeit, die sich gemäss der klassischen Geschwindigkeitsaddition ergibt, während $\Delta u_{\text{rel}} = (u'+v)\cdot\frac{u'v}{c^2}$ für die relativistische Korrektur dieser klassischen Geschwindigkeit steht. Auf diese Weise können wir effektiv beziffern, um welchen Betrag der relativistische Wert vom klassischen Wert abweichen würde:

$$\Delta u_{\text{rel}} = (u'+v)\cdot\frac{u'v}{c^2} = 69.44\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 2.143\cdot 10^{-14} = 1.49\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Erst auf der zwölften Nachkommastelle von $69.44\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ gäbe es aufgrund der Relativitätstheorie eine Abweichung vom klassischen Wert. Logisch, dass wir das nicht bemerken und auch im TR-Display nichts davon sehen.

2. *Querfahrt numerisch*

   Die Nettogeschwindigkeit quer zum Fluss beträgt gemäss Skizze resp. Satz des Pythagoras:

   $$V = \sqrt{c^2 - v^2} = \sqrt{\left(5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 - \left(3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

   Daraus folgt für die Dauer der Querfahrt hin und zurück:

   $$t_{\mathrm{Q}} = \frac{2b}{V} = \frac{2\cdot 20\,\mathrm{m}}{4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 10\,\mathrm{s}$$

3. *Querfahrt rein formal*

   Setzen wir die beiden Schritte formal zusammen, so notieren wir für die benötigte Zeit t_{Q}:

   $$t_{\mathrm{Q}} = \frac{2b}{V} = \frac{2b}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

4. *Längsfahrt numerisch*

   Auf der Hinfahrt flussabwärts unterstützt die Fliessgeschwindigkeit das Boot. Dessen Geschwindigkeit relativ zum Ufer beträgt dann:

   $$v_{\text{hin}} = c + v = 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

   Entsprechend wird die Geschwindigkeit bei der Rückfahrt durch das Fliessen des Wasser verringert:

   $$v_{\text{rück}} = c - v = 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

   Nun können wir die Zeitdauer für die gesamte Längsfahrt berechnen:

   $$t_{\mathrm{L}} = t_{\text{hin}} + t_{\text{rück}} = \frac{s}{v_{\text{hin}}} + \frac{s}{v_{\text{rück}}} = \frac{20\,\mathrm{m}}{8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} + \frac{20\,\mathrm{m}}{2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 2.5\,\mathrm{s} + 10\,\mathrm{s} = 12.5\,\mathrm{s}$$

   Die Längsfahrt ($12.5\,\mathrm{s}$) dauert offensichtlich länger als die die Querfahrt ($10\,\mathrm{s}$).

5. *Längsfahrt rein formal*

   Fassen wir auch die Zeitberechnung bei der Längsfahrt formal zusammen:

$$t_\mathrm{L} = \frac{s}{v_\mathrm{hin}} + \frac{s}{v_\mathrm{rück}} = \frac{s}{c+v} + \frac{s}{c-v} = \frac{s(c-v)+s(c+v)}{(c+v)(c-v)} = \frac{sc - sv + sc + sv}{c^2 - v^2} = \frac{2sc}{c^2 - v^2}$$

6. *Formale Weiterbearbeitung*

   (a) Bei den beiden Resultaten aus 3 und 5 muss man nur noch $\frac{2b}{c}$ resp. $\frac{2s}{c}$ als eigenen Faktor vor den Bruch ziehen, dann stehen die verlangten Ausdrücke da. Dazu muss im Nenner c^2 ausgeklammert werden, bei t_Q unter der Wurzel, sodass durch teilweises Radizieren ein Faktor c vor der Wurzel entsteht:

$$t_\mathrm{Q} = \frac{2b}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2b}{\sqrt{c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} = \frac{2b}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2b}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t_\mathrm{L} = \frac{2sc}{c^2 - v^2} = \frac{2sc}{c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{2s}{c\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{2s}{c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

   (b) Wir verwenden die angegebenen Näherungsformeln, um t_Q und t_L zu vereinfachen:

$$t_\mathrm{Q} = \frac{2b}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx \frac{2b}{c} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$t_\mathrm{L} = \frac{2s}{c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \frac{2s}{c} \cdot \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)$$

7. *Formale Angabe der Differenz der Laufzeitdifferenzen*

   (a) Jetzt geht es um die Laufzeitdifferenz $\Delta t = t_\mathrm{L} - t_\mathrm{Q}$, die sich bei gleichen Strecken ($l = b = s$) mit den Schlussausdrücken aus Aufgabe 6 wie folgt notieren und vereinfachen lässt:

$$\begin{aligned}\Delta t = t_\mathrm{L} - t_\mathrm{Q} &\approx \frac{2l}{c} \cdot \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{2l}{c} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) \\ &= \frac{2l}{c} \cdot \left(1 + \frac{v^2}{c^2} - 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{2l}{c} \cdot \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} = \frac{l}{c} \cdot \frac{v^2}{c^2}\end{aligned}$$

   (b) Für die Differenz der Laufzeitdifferenzen vor und nach dem Vertauschen folgt:

$$\Delta t - \Delta t' = 2\Delta t = \frac{2l}{c} \cdot \frac{v^2}{c^2}$$

8. *Die relevante Grösse im Versuch von Michelson und Morley*

   Wir verwenden die Schlussformel von Aufgabe 7.(b) ein ($c = 3 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 300\,000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$):

$$\Delta t - \Delta t' = \frac{2l}{c} \cdot \frac{v^2}{c^2} = \frac{2 \cdot 10\,\mathrm{m}}{3 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \cdot \frac{\left(60\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}\right)^2}{\left(300\,000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}\right)^2} = \frac{2}{3 \cdot 10^7} \cdot \left(\frac{1}{5000}\right)^2 \mathrm{s} = 2.67 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{s}$$

   Daraus folgt für die Strecke, die das Licht in dieser Zeit zurücklegt:

$$\Delta s = c \cdot (\Delta t - \Delta t') = 3 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 2.67 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{s} = 8 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m} = 800\,\mathrm{nm} \approx 600\,\mathrm{nm}$$

   Bei der Richtungsvertauschung im Versuch von Michelson und Morley würde die Laufwegverschiebung aufgrund des Ätherwindes somit mehr als eine Wellenlänge betragen. Damit müsste sich das Interferenzmuster gut sichtbar verändern.