Übungen zum EF Physik des 20. Jahrhunderts

Serie 1: Relativitätsprinzip – LÖSUNGEN

1. *Kurze rechnungsfreie Kontrollfragen*

   (a) Z.B. könnte man sich einen Luftkissentisch im Auto vorstellen, auf dem eine Scheibe auf der Luft schwebt. Sie ist horizontal frei bewegbar und wegen der Luft reibungsfrei.

   Fährt das Auto gleichförmig geradeaus und schwebt die Scheibe in diesem Moment über einem bestimmten Punkt auf der Scheibe, so bleibt dies einfach so. In diesem Moment ist das Auto also ohne grossen Fehler ein Inertialsystem, denn im Autosystem ist die Scheibe kräftefrei (Gewichtskraft und Tragekraft des Luftkissens sind im Gleichgewicht) und gleichzeitig in Ruhe (= Spezialfall der gleichförmigen geradlinigen Bewegung).

   Fährt das Auto nun z.B. durch eine Linkskurve, so wird sich die Scheibe von der Strasse aus gesehen weiter geradeaus bewegen. Im Autosystem hingegen wird die Scheibe nach rechts beschleunigt. Sie ist aber nach wie vor kräftefrei – am Kräftegleichgewicht hat sich nichts geändert. Damit gilt das Trägheitsprinzip im Autosystem nicht mehr und folglich ist es kein Inertialsystem mehr.

   (b) Eine Person im Auto wird bei der Kurvenfahrt die Beschleunigung der Scheibe nach rechts mit dem wirken einer Kraft assoziieren – eine Kraft, die es im Newton'schen Sinn aber eigentlich gar nicht gibt. Im Autosystem erfährt die Scheibe somit eben eine Scheinkraft, die in diesem Fall den Namen Zentrifugalkraft erhalten hat. Wir wissen aber: Es ist die Trägheit der Scheibe, aufgrund der sie sich von der Strasse aus gesehen einfach geradeaus und gleichförmig weiter bewegt.

   Übrigens wollen wir solche Scheinkräfte gar nicht "verdammen" oder verbieten. In vielen Fällen sind sie absolut nützlich, denn sie erlauben uns oftmals auch in beschleunigten Bezugssystem die Newton'sche Mechanik resp. das Aktionsprinzip anzuwenden. Im Autobeispiel ist das ja auch der Fall. Solange das Auto die Linkskurve fährt, erfahren alle Gegenstände darin eine "Kraft" nach rechts, mit der wir dann wie mit anderen Kräften rechnen können.

   (c) Das Schulzimmer befindet sich – zusammen mit dem Schulhaus, Zürich und der Schweiz – in einer ständigen Kreisbewegung um die Erdachse. Dazu muss es selber beschleunigt sein (Zentripetalbeschleunigung), kann also kein echtes Inertialsystem sein. Wir können aber kurz überschlagen, dass diese Beschleunigung verhältnismässig klein ist: Zürich befindet sich auf etwa $47.4°$ geografischer Breite. Somit beträgt der Bahnradius der Kreisbahn von Zürich um die Erdachse:

   $$r = R_\mathrm{E} \cdot \cos 47.4° = 6370\,\mathrm{km} \cdot \cos 47.4° = 4312\,\mathrm{km}$$

   In 24 Stunden dreht sich die Erde ungefähr einmal (tatsächlich ist diese Umlaufszeit etwas geringer, was einfach mit der Definition des Tages, also der 24 Stunden zu tun hat). Es folgt für die Bahngeschwindigkeit des Schulzimmers:

   $$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 4312\,\mathrm{km}}{24 \cdot 3600\,\mathrm{s}} = 314\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

   Das ist doch immerhin fast Schallgeschwindigkeit! Für die Zentripetalbeschleunigung ergibt sich:

   $$a_\mathrm{Z} = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(314\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{4312\,\mathrm{km}} = 0.023\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

   Verglichen mit dem für uns entscheidenden Ortsfaktor von $g = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ ist das doch sehr bescheiden und so verstehen wir, weshalb uns diese Schulzimmerbeschleunigung gar nicht auffällt. Für die nicht hochpräzisen Mechanik-Versuche ist unser Schulzimmer daher in sehr guter Näherung ein Inertialsystem.

   P.S.: Tatsächlich sind die $9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ bereits ein um diese Zentripetalbeschleunigung korrigierter Wert. Der rein gravitative Ortsfaktor läge bei etwa $9.83\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, wie wir nun verstehen.

(d) Die Standardorientierung ist der einfachst mögliche Fall, wie zwei relativ zueinander bewegende Inertialsysteme S und S' angeordnet sein können. Für sie gilt:

- Die x-Achse ist parallel zur x'-Achse, die y-Achse ist parallel zur y'-Achse, die z-Achse ist parallel zur z'-Achse.
- Diese Achsenparallelitäten bleiben erhalten. Es gibt also keine Rotation (ansonsten wäre sowieso mindestens eines der beiden Systeme kein Inertialsystem).
- Das System S' bewegt sich aus der Sicht des Systems S mit der Geschwindigkeit v längs der x-Achse.
- Zum Zeitpunkt $t = 0$ fallen die örtlichen Nullpunkte der beiden Systeme zusammen. Zudem ist dies auch der Moment, wo $t' = 0$ ist. D.h. also, dass das Ereignis "beide Ursprünge fallen zusammen" in beiden Systemen die vierdimensionalen Koordinaten $(0, 0, 0, 0)$ aufweist.

Mit diesen Vorgaben gilt in der Klassischen Mechanik die Galilei-Transformation für die Umrechnung der Koordinaten vom einen ins andere System:

$$t' = t \qquad x' = x - vt \qquad y' = y \qquad z' = z$$

(e) Ich gebe einen Absatz aus dem Buch **"Die Spezielle Relativitätstheorie"** von **H.+M. Ruder** wieder:

Gegen ein Inertialsystem ist auch die Bahn jedes sich selbst überlassenen Massenpunktes geradlinig. Unser System im Schwerpunkt des Sonnensystems ist dann in ausgezeichneter Näherung ein solches Inertialsystem; wie gut, muss die Beobachtung zeigen. Die moderne Astronomie stellt jedoch bereits höhere Anforderungen; das hat zu einer weiteren Annäherung an ein Inertialsystem geführt. Dazu werden die Eigenbewegungen von etwa 1000 am Himmel gleichverteilten Fixsternen so genau wie möglich verfolgt (Fundamental-Katalog). Unter Annahme statistisch verteilter Eigenbewegungen lässt sich die "wirkliche" Eigenbewegung der Sonne ermitteln. Sie läuft in ca. 220 Millionen Jahren einmal um den Schwerpunkt unserer Milchstrasse. Ein im Schwerpunkt unserer Milchstrasse ruhendes, relativ zu den anderen Galaxien sich nicht drehendes Koordinatensystem ist augenblicklich (und wahrscheinlich für lange) das beste Inertialsystem. Die Achsen dieses Inertialsystems werden seit einigen Jahren durch die routinemässigen VLBI-Beobachtungen ("Very Long Baseline Interferometry") von Quasaren mit einer Richtungsgenauigkeit von einer Millibogensekunde realisiert. (Man bedenke: Eine Millibogensekunde ist der Winkel, unter dem man einen Millimeter aus 200 Kilometer Entfernung sieht!)

(f) Das sich der Zustand des "in Ruhe Seins" nur relativ zu einem Bezugsobjekt angeben lässt, kann dem Begriff der Ruhe tatsächlich keine absolute Bedeutung zukommen.

(g)
  i. Nein. Ein Vorgang sieht in verschiedenen Inertialsystemen durchaus verschieden aus, aber die Gesetze, die diesen verschieden aussehenden Vorgang beschreiben, sind dieselben. Vergleiche dazu die Abbildung in Aufgabe 1.(h). Die Flugbahn des Balls sieht im Flugzeugsystem anders aus als vom Boden aus betrachtet, aber in beiden Systemen ist es die Gewichtskraft und das Aktionsprinzip, die diese Flugbahn korrekt beschreiben.
  ii. Das ist auch falsch, wie man leicht einsieht. Bewegt sich ein Objekt in einem Bezugssystem, so ist es in seinem Eigensystem in Ruhe. Folglich muss es in diesen beiden Systemen eine verschieden grosse kinetische Energie aufweisen ($E_{\text{kin}} = \frac{mv^2}{2}$).
  iii. Dies trifft zu – zumindest in der klasssischen Physik. Wenn wir in zwei verschiedenen Inertialsystemen einen Versuch genau gleich vorbereiten und durchführen, so müssen mechanische Experimente zum genau gleichen Resultat führen, weil die Gesetze der Mechanik in beiden Bezugssystemen identisch und deterministisch sind.

(h) Vergleiche zu dieser Grafik die Erläuterungen unter (g).i. In den verschiedenen Bezugssystemen sieht der Bewegungsablauf des Balls anders aus. Die Bewegung ist also relativ (und nicht absolut), d.h. vom Bezugssystem abhängig. Aber in beiden Inertialsystemen gelten dieselben physikalischen Gesetze. Das bedeutet, diese Gesetze sind absolut. Dies ist der eigentliche Kern des Relativitätsprinzips.

2. *Kleine Rechenaufgaben*

   (a) i. Im System von Boot 1 hat Boot 2 eine Geschwindigkeit von $3.4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 5.0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{8.4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$. Umgekehrt hat Boot 1 im System von Boot 2 eine Geschwindigkeit von $\underline{\underline{-8.4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$.

   ii. Von Boot 1 aus gesehen beträgt die Wassergeschwindigkeit $\underline{\underline{3.4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$, im System von Boot 2 sind es $\underline{\underline{-5.0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$.

   iii. Auf Boot 1 ist die Rückwärtsrichtung die Ostrichtung, da es selber nach Westen fährt. Im Wassersystem hat der Ball folglich eine Geschwindigkeit von $-3.4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 7.2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{3.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$. Und aus der Sicht von Boot 2 beträgt die Ballgeschwindigkeit $-8.4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 7.2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{-1.2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$.

   (b) Gemäss der Galilei'schen Geschwindigkeitstransformation müssen die Geschwindigkeiten von Zug und Minibar addiert werden. Es folgt somit ($c =$ Lichtgeschwindigkeit):

   i. $u = v + u' = 0.8\,c - 0.6\,c = \underline{\underline{0.2\,c}} = \underline{\underline{20\,\%\,c}}$

   ii. $u = v + u' = 0.8\,c + 0.6\,c = \underline{\underline{1.4\,c}} = \underline{\underline{140\,\%\,c}}$

   Bewegt sich die Minibar im Zug vorwärts, so ist sie aus Sicht der Schienen also schneller als Licht, wenn wir der Galilei-Transformation vertrauen können.

3. *Ereignisse in verschiedenen Bezugssystemen*

   (a) Die geschilderte Situation entspricht der Standardorientierung zweier sich relativ zueinander bewegender Inertialsysteme. Im Schienensystem S bewegt sich das Zugsystem S' mit der Geschwindigkeit $v = 126\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 35\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ in x-Richtung.
   Die Koordinaten des Ereignisses A "Betätigung der Zugpfeife" lauten im Zugsystem S' natürlich $(t', x', y', z') = (12\,\mathrm{s}, 120\,\mathrm{m}, 0, 0)$, wobei wir die y'- und die z'-Koordinate ebenso gut weglassen können, denn für alle unsere Ereignisse werden diese Koordinaten gleich 0 sein.
   Wir benutzen nun die Galilei-Rücktransformation, um diese Koordinaten ins Schienensystem S umzurechnen:

   $$t = t' = 12\,\mathrm{s} \qquad \text{und} \qquad x = x' + v \cdot t' = 120\,\mathrm{m} + 35\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 12\,\mathrm{s} = 120\,\mathrm{m} + 420\,\mathrm{m} = 540\,\mathrm{m}$$

   Somit hat das Ereignis A im Schienensystem die Koordinaten $\underline{\underline{(t, x) = (12\,\mathrm{s}, 540\,\mathrm{m})}}$.

   (b) Im Schienensystem S sind die Koordinaten des Ereignisses B "Alter Herr betritt unbewachten Bahnübergang" bereits angegeben: $\underline{\underline{(t, x) = (10\,\mathrm{s}, 750\,\mathrm{m})}}$.
   Mittels Galilei-Transformation wechseln wir ins Zugsystem S':

   $$t' = t = 10\,\mathrm{s} \qquad \text{und} \qquad x' = x - v \cdot t = 750\,\mathrm{m} - 35\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 10\,\mathrm{s} = 750\,\mathrm{m} - 350\,\mathrm{m} = 400\,\mathrm{m}$$

   Damit lauten die Koordinaten von B im Zugsystem $\underline{\underline{(t', x') = (10\,\mathrm{s}, 400\,\mathrm{m})}}$.

4. *Bezugssysteme beim vollständig inelastischen Stoss – Impuls und kinetische Energie*

(a) Für die beiden Impulse vor dem Stoss erhalten wir im System B der Luftkissenbahn:

$$p_1 = m_1 \cdot v_1 = 0.5\,\mathrm{kg} \cdot 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \text{und} \qquad p_2 = m_2 \cdot v_2 = 0.75\,\mathrm{kg} \cdot 0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0$$

(b) Wir benutzen das Prinzip der Impulserhaltung, um die Geschwindigkeit v_1' der beiden Schlitten nach dem Stoss zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
& & p'_{\text{tot}} &= p_{\text{tot}} && |\,\text{Summen notieren}\\
&\Rightarrow & p'_1 + p'_2 &= p_1 + p_2 && |\,p = m \cdot v\\
&\Rightarrow & m_1 v'_1 + m_2 v'_2 &= m_1 v_1 + m_2 v_2 && |\,v_2 = 0 \text{ und } v'_1 = v'_2\\
&\Rightarrow & (m_1 + m_2) v'_1 &= m_1 v_1 && |\,:(m_1 + m_2)\\
&\Leftrightarrow & v'_1 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 && |\,\text{Werte einsetzen}\\
& & &= \frac{0.5\,\mathrm{kg}}{0.5\,\mathrm{kg} + 0.75\,\mathrm{kg}} \cdot 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0.4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}$$

Die beiden Schlitten sind nach dem Stoss mit einer langsameren Geschwindigkeit unterwegs, weil der Gesamtimpuls nun auf mehr Masse verteilt ist – sehr anschaulich!

(c) Wir berechnen die kinetischen Energien vor und nach dem Stoss:

$$E_{\text{kin},1} = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{0.5\,\mathrm{kg} \cdot \left(1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2} = 0.25\,\mathrm{J} \qquad \text{und} \qquad E_{\text{kin},2} = \frac{m_2 v_2^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad E_{\text{kin,tot}} = E_{\text{kin},1} + E_{\text{kin},2} = 0.25\,\mathrm{J}$$

$$E'_{\text{kin},1} = \frac{m_1 {v'_1}^2}{2} = \frac{0.5\,\mathrm{kg}\,\left(0.4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2} = 0.04\,\mathrm{J} \qquad E'_{\text{kin},2} = \frac{m_2 {v'_1}^2}{2} = \frac{0.75\,\mathrm{kg}\,\left(0.4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2} = 0.06\,\mathrm{J}$$

$$\Rightarrow \quad E'_{\text{kin,tot}} = E'_{\text{kin},1} + E'_{\text{kin},2} = 0.1\,\mathrm{J}$$

Verlust an kinetischer Energie: $\Delta E = E'_{\text{kin,tot}} - E_{\text{kin,tot}} = 0.1\,\mathrm{J} - 0.25\,\mathrm{J} = -0.15\,\mathrm{J}$

Beim Stoss geht also $0.15\,\mathrm{J}$ kinetische Energie verloren. Daher sprechen wir von einem **inelastischen** Stoss. Dieser Verlust an kinetischer Energie geht in Wärme über, deren Auswirkung man mit präzisen Messgeräten sogar als leichte Temperaturerhöhung erfassen könnte.

(d) Im System S_1 des sich anfänglich bewegenden Schlittens 1 lauten die Geschwindigkeiten:

$$v_1 = 0 \quad \text{(Bezugssystem ist eigenes System)} \qquad \text{und} \qquad v_2 = -1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad \text{(nach links, daher } < 0)$$

Jetzt können wir alle Berechnungen aus (a) und (b) im neuen System S durchführen. Zuerst die Impulse vor dem Stoss:

$$p_1 = m_1 \cdot v_1 = 0.5\,\mathrm{kg} \cdot 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \text{und} \qquad p_2 = m_2 \cdot v_2 = 0.75\,\mathrm{kg} \cdot 0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0$$

Dann berechnen wir mittels Impulserhaltung die Geschwindigkeit nach dem Stoss:

$$\begin{aligned}
& & p'_{\text{tot}} &= p_{\text{tot}} && |\,\text{Summen notieren}\\
&\Rightarrow & p'_1 + p'_2 &= p_1 + p_2 && |\,p = m \cdot v\\
&\Rightarrow & m_1 v'_1 + m_2 v'_2 &= m_1 v_1 + m_2 v_2 && |\,v_1 = 0 \text{ und } v'_1 = v'_2\\
&\Rightarrow & (m_1 + m_2) v'_1 &= m_2 v_2 && |\,:(m_1 + m_2)\\
&\Leftrightarrow & v'_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2 && |\,\text{Werte einsetzen}\\
& & &= \frac{0.75\,\mathrm{kg}}{0.5\,\mathrm{kg} + 0.75\,\mathrm{kg}} \cdot \left(-1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) = -0.6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}$$

Ja, im System S_1 des Schlittens 1 vor dem Stoss bewegen sich die beiden Schlitten nach dem Stoss eben nach links. Es ergibt sich also ganz korrekt eine negative Geschwindigkeit, die auch mit der im System B berechneten Geschwindigkeit zusammenpasst: $0.4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = -0.6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Die Impulse in den beiden System sind jeweils verschieden, aber aus der Impulserhaltung folgt in beiden Systemen die korrekte Geschwindigkeit. Die Impulserhaltung als physikalisches Gesetz ist in beiden Systemen gültig, auch wenn die darin auftretenden Zahlenwerte andere sind.

Nun zu den Energien:

$$E_{\mathrm{kin},1} = 0 \quad \text{und} \quad E_{\mathrm{kin},2} = \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{0.75\,\mathrm{kg}\cdot\left(-1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2} = 0.375\,\mathrm{J}$$

$$\Rightarrow \quad E_{\mathrm{kin,tot}} = E_{\mathrm{kin},1} + E_{\mathrm{kin},2} = 0.375\,\mathrm{J}$$

$$E'_{\mathrm{kin},1} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} = \frac{0.5\,\mathrm{kg}\left(-0.6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2} = 0.09\,\mathrm{J}$$

$$E'_{\mathrm{kin},2} = \frac{m_2 v_1'^2}{2} = \frac{0.75\,\mathrm{kg}\left(-0.6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2} = 0.135\,\mathrm{J}$$

$$\Rightarrow \quad E'_{\mathrm{kin,tot}} = E'_{\mathrm{kin},1} + E'_{\mathrm{kin},2} = 0.225\,\mathrm{J}$$

Verlust an kinetischer Energie: $\Delta E = E'_{\mathrm{kin,tot}} - E_{\mathrm{kin,tot}} = 0.225\,\mathrm{J} - 0.375\,\mathrm{J} = -0.15\,\mathrm{J}$

In beiden Systemen berechnen wir einen Energieverlust von $-0.15\,\mathrm{J}$ kinetischer Energie. Das muss so sein, denn sonst würde im einen System mehr und im anderen weniger Energie zur Erzeugung von Wärme verwendet, was der Energieerhaltung widersprechen würde. Das ist sehr bemerkenswert, denn offenbar sorgt die Galilei-Transformation der Geschwindigkeiten zusammen mit der Formel für die kinetische Energie dafür, dass der Energieverlust in Wärme immer gleich herauskommt, unabhängig vom System, in dem man die Berechnung durchführt.

(e) Wir berechnen zuerst die Geschwindigkeit des CMS aus der Sicht des Bahnsystems B:

$$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{0.5\,\mathrm{kg}\cdot 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 0.75\,\mathrm{kg}\cdot 0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{0.5\,\mathrm{kg} + 0.75\,\mathrm{kg}} = 0.4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Dieses Resultat haben schon einmal erhalten! Es entspricht genau der Berechnung der gemeinsamen Geschwindigkeit nach dem Stoss im Bahnsystem!

(f) Das kann nur eines bedeuten: Nach dem Zusammenstoss sind die beiden Schlitten im CMS in Ruhe! Vor dem Stoss fahren sie von links und von rechts auf den im CMS eben ruhenden gemeinsamen Schwerpunkt zu; und da dieser Schwerpunkt im CMS eben auch beim Stoss in Ruhe bleibt, müssen in diesem System nach dem Stoss beide Schlitten ruhen.

(g) Im CMS ist der Gesamtimpuls stets gleich 0. Nach den obigen Überlegungen ist dies für die Zeit nach dem Stoss bereits sonnenklar (nach dem Stoss gibt es keine Bewegung). Überzeugen wir uns noch kurz davon, dass der Gesamtimpuls im CMS auch vor dem Stoss gleich 0 ist:

$$\text{CMS-Geschwindigkeiten:} \quad v_1 = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 0.4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0.6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad \text{und} \quad v_2 = 0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 0.4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = -0.4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\text{Gesamtimpuls:} \quad p_{\mathrm{tot}} = p_1 + p_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0.5\,\mathrm{kg}\cdot 0.6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 0.75\,\mathrm{kg}\left(-0.4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) = 0$$

(h) Wir wissen bereits, dass als Verlust an kinetischer Energie wieder $-0.15\,\mathrm{J}$ herauskommen sollte. Das können wir auch im CMS wie gewohnt berechnen:

$$E_{\mathrm{kin},1} = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{0.5\,\mathrm{kg}\cdot\left(0.6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2} = 0.09\,\mathrm{J} \qquad E_{\mathrm{kin},2} = \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{0.75\,\mathrm{kg}\cdot\left(-0.4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2} = 0.06\,\mathrm{J}$$

$$\Rightarrow \quad E_{\mathrm{kin,tot}} = E_{\mathrm{kin},1} + E_{\mathrm{kin},2} = 0.15\,\mathrm{J}$$

$$E'_{\mathrm{kin},1} = 0 \quad \text{und} \quad E'_{\mathrm{kin},2} = 0 \quad \Rightarrow \quad E'_{\mathrm{kin,tot}} = 0$$

Verlust an kinetischer Energie: $\Delta E = E'_{\mathrm{kin,tot}} - E_{\mathrm{kin,tot}} = 0\,\mathrm{J} - 0.15\,\mathrm{J} = -0.15\,\mathrm{J}$

(i) Erneut haben wir den stets gleichen Verlust von $0.15\,\mathrm{J}$ kinetischer Energie bestätigt.

(j) Darüber haben wir bereits nachgedacht: In allen Bezugssystemen muss gleich viel kinetische Energie verloren gehen, damit nicht im einen System mehr Wärme freigesetzt wird als im anderen. Letzteres würde der Energieerhaltung widersprechen.

(k) Dies ist eine erste grosse allgemeine Rechnung zum Thema Relativität, auch wenn es um klassische Mechanik geht.

Wir wissen, wie gross der Energieverlust im Bahnsystem B ist (vgl. Aufgabe (c)):

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{kin,tot}} &= E'_{\text{kin,tot}} - E_{\text{kin,tot}} = E'_{\text{kin},1} + E'_{\text{kin},2} - E_{\text{kin},1} - E_{\text{kin},2} \\ &= \frac{m_1 V^2}{2} + \frac{m_2 V^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1+m_2)\,V^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2}\end{aligned}$$

Dabei haben wir wieder verwendet, dass $v_2 = 0$ und dass $V = v'_2 = v'_1$. Aus der Impulserhaltung wissen wir, dass die gemeinsame Geschwindigkeit V nach dem Stoss im System B durch

$$V = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

gegeben ist. Diesen Ausdruck können wir in den Energieerlust oben einsetzen und erhalten:

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{kin,tot}} &= \frac{(m_1+m_2)\,V'^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1+m_2}{2}\cdot\left(\frac{m_1 v_1}{m_1+m_2}\right)^2 - \frac{m_1 v_1^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{m_1^2 v_1^2}{m_1+m_2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1^2 v_1^2 - m_1^2 v_1^2 - m_1 m_2 v_1^2}{2(m_1+m_2)} = -\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\cdot\frac{v_1^2}{2}\end{aligned}$$

Das ist ein schön kompaktes Resultat im Bahnsystem B.

Wir wollen nun zeigen, dass wir denselben Verlust an kinetischer Energie in jedem beliebigen anderen Inertialsystem erhalten. Dazu müssen wir die Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoss, also v_1, v_2 und V, allesamt in dieses neue Bezugssystem N umrechnen. N bewege sich relativ zum B mit der Geschwindigkeit r nach rechts (wobei r auch negative Werte annehmen darf, was dann einem System N entsprechen würde, das sich nach links bewegt). Dann gilt gemäss der Galileischen Geschwindigkeitstransformation:

$$w_1 = v_1 - r \qquad w_2 = v_2 - r = -r \qquad W = V - r$$

Dabei bezeichnen w_1, w_2 und W die Geschwindigkeiten der Schlitten vor und nach dem Stoss im neuen System N.

Berechnen wir zuerst die kinetische Gesamtenergie in N vor dem Stoss:

$$\begin{aligned}E_{\text{kin,tot},N} &= E_{\text{kin},1,N} + E_{\text{kin},2,N} = \frac{m_1 w_1^2}{2} + \frac{m_2 w_2^2}{2} = \frac{m_1 (v_1 - r)^2}{2} + \frac{m_2 (-r)^2}{2} \\ &= \frac{m_1\left(v_1^2 - 2 v_1 r + r^2\right)}{2} + \frac{m_2 r^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} - m_1 v_1 r + \frac{(m_1+m_2)\,r^2}{2}\end{aligned}$$

Nun berechnen wir ebenso die kinetische Gesamtenergie nach dem Stoss:

$$\begin{aligned}E'_{\text{kin,tot},N} &= \frac{(m_1+m_2)\,W^2}{2} = \frac{(m_1+m_2)\,(V-r)^2}{2} = \frac{(m_1+m_2)\left(V^2 - 2Vr + r^2\right)}{2} \\ &= \frac{(m_1+m_2)\,V^2}{2} - (m_1+m_2)\,Vr + \frac{(m_1+m_2)\,r^2}{2}\end{aligned}$$

Wiederum ersetzen wir in diesem Ausdruck alle V durch $\frac{m_1 v_1}{m_1+m_2}$ und erhalten so:

$$\begin{aligned}E'_{\text{kin,tot},N} &= \frac{m_1+m_2}{2}\cdot\left(\frac{m_1 v_1}{m_1+m_2}\right)^2 - (m_1+m_2)\,r\cdot\frac{m_1 v_1}{m_1+m_2} + \frac{(m_1+m_2)\,r^2}{2} \\ &= \frac{m_1^2}{m_1+m_2}\cdot\frac{v_1^2}{2} - m_1 v_1 r + \frac{(m_1+m_2)\,r^2}{2}\end{aligned}$$

Nun können wir die Differenz dieser totalen kinetischen Energien bilden und somit im System N den Verlust an kinetischer Energie beim Stoss bestimmen:

$$\Delta E_{\text{kin},N} = E'_{\text{kin,tot},N} - E_{\text{kin,tot},N} = \frac{m_1^2}{m_1+m_2} \cdot \frac{v_1^2}{2} - m_1 v_1 r + \frac{(m_1+m_2)\, r^2}{2} - \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} - m_1 v_1 r + \frac{(m_1+m_2)\, r^2}{2} \right)$$

Die beiden Ausdrücke $m_1 v_1 r$ und $\frac{(m_1+m_2)\, r^2}{2}$ streichen sich direkt weg. Es ergibt sich:

$$\Delta E_{\text{kin},N} = \frac{m_1^2}{m_1+m_2} \cdot \frac{v_1^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2}$$

Dieser Term hängt bereits nicht mehr von der Relativgeschwindigkeit r ab. Dann kann eigentlich nichts mehr anderes herauskommen als der Energieverlust, den wir schon zu Beginn im Bahnsystem B berechnet hatten:

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{kin},N} &= \frac{m_1^2}{m_1+m_2} \cdot \frac{v_1^2}{2} - \frac{m_1(m_1+m_2)\, v_1^2}{2(m_1+m_2)} = \frac{m_1^2 v_1^2 - m_1^2 v_1^2 - m_1 m_2 v_1^2}{2(m_1+m_2)} \\ &= -\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \cdot \frac{v_1^2}{2} = \Delta E_{\text{kin,tot}} \qquad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

Tatsächlich ergibt sich genau der gleiche Verlust an kinetischer Energie wie im Bahnsystem.

(l) Das CMS ist dasjenige (einzige) System, in dem sich die Schlitten nach dem Zusammenstoss nicht bewegen. Damit beträgt die totale kinetische Energie nach dem Stoss 0 und ist somit minimal. Das CMS ist somit das System mit der geringsten totalen kinetischen Energie nach dem Stoss. Da aber, wie wir gezeigt haben, in allen Systemen beim Stoss genau gleich viel kinetische Energie verloren geht, muss dass CMS auch genau das System sein, in dem vor dem Stoss im Vergleich mit allen anderen Systemen total am wenigsten kinetische Energie vorhanden ist. q.e.d.