Übungen zum EF Physik des 20. Jahrhunderts

Serie 12: Komplexe Zahlen, freies Teilchen und Differentialgleichungen der klassischen Mechanik

1. *Ein paar Übungen mit komplexen Zahlen*

   (a) Es seien $z_1 = 1 - 2\mathrm{i}$, $z_2 = -2 + \mathrm{i}$ und $z_3 = -3 - 4\mathrm{i}$. Berechne die folgenden Ausdrücke:

   i. $z_1 \cdot z_2 + z_3$ ii. $(z_2 - z_1) \cdot z_3$ iii. $z_1^* \cdot z_2 \cdot z_3^*$ iv. $|z_3|^2 - |z_2| \cdot |z_1|$

   (b) Vereinfache die Potenzen i^0, i^1, i^2, i^3, i^4, etc.!

   (c) Gib $z_1 = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$, $z_2 = e^{\mathrm{i}\pi}$, $z_3 = e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}$, $z_4 = e^{\mathrm{i}\,2\pi}$ und $z_5 = e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ in der Summenschreibweise an.

   (d) Wandle die folgenden Zahlen von der Euler-Darstellung in die Sumenschreibweise um:

   $$z_1 = 2\,e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} \qquad z_2 = 2\sqrt{3}\,e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \qquad z_3 = \frac{\sqrt{2}}{3}\,e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}$$

   (e) Überlege dir, wie man komplexe Zahlen von der Summenschreibweise in die Euler-Darstellung umwandelt und probiere deine Vorgehensweise an den folgenden Beispielen aus:

   $$z_1 = 3 + 3\mathrm{i} \qquad z_2 = -3 + \sqrt{3}\,\mathrm{i} \qquad z_3 = -5 - 5\mathrm{i} \qquad z_4 = 1 - 4\mathrm{i}$$

   Tipp: Der Radius r dürfte schnell bestimmt sein. Die Winkelkoordinate φ gibt mehr zu denken, insbesondere, wenn sie im Intervall $]-\pi;\pi]$ liegen soll.

   (f) Das Konjugierte einer Zahl komplexen Zahl $z = x + y\mathrm{i}$ ist gegeben durch $z^* = x - y\mathrm{i}$. Auch zu $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$ lässt sich das Konjugierte rasch angeben. Wie lautet z^* in der Euler-Darstellung?

   (g) Der Betrag einer komplexen Zahl $z = x + y\mathrm{i}$ ist gegeben durch $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, also durch die Wurzel aus der Summe der Quadrate von Real- und Imaginärteil.

   i. Zeige, dass gilt: $|z| = \sqrt{z^* \cdot z}$.

   ii. Die Gleichung $|z|^2 = z^* \cdot z$ ist besonders nützlich bei Verwendung der Euler-Darstellung $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$. Was passiert denn, wenn man diese Euler-Darstellung in die Gleichung einsetzt und wie gross ist $|z|$ demnach eben? (**Tipp:** Verwende dein Resultat aus Aufgabe (f).)

   (h) Wo in der Gauss'schen Zahlenebene liegen die beiden Zahlen $z_1 = 2\,e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ und $z_2 = -1 + \mathrm{i}$? Wie liegt die Summe dieser beiden Zahlen und wo das Produkt?

   Hinweis: Überlege bei Summe und Produkt zuerst grafisch, bevor du etwas rechnest! Zur Erinnerung: Die Addition erfolgt vektoriell, die Multiplikation ist eine Drehstreckung um den Ursprung.

   (i) Welche grafische Auswirkung hat die Multiplikation einer beliebigen komplexen Zahl z mit $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ und wie lautet demnach das Resultat von $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(-1 + 3\mathrm{i})$?

   (j) **Fakultative Zusatzaufgabe:** Wir haben die Euler-Formel kennengelernt: $e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$. Offenbar lässt sich die Exponentialfunktion $e^{\mathrm{i}\varphi}$ als Linearkombination ($\widehat{=}$ Summe) einer Cosinus- und einer Sinusfunktion notieren.

   i. Wie lautet in gleicher Weise die Linearkombination aus $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ für $e^{-\mathrm{i}\varphi}$?
   Hinweis: Benutze die Hauptsymmetrien von Cosinus- und Sinusfunktion:

   $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ Achsensymmetrie $\qquad$ $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ Punktsymmetrie

   ii. Wenn sich $e^{\mathrm{i}\varphi}$ und $e^{-\mathrm{i}\varphi}$ durch $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ ausdrücken lassen, so müsste das doch auch umgekehrt gehen! Wie lauten also die Ausdrücke für $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ als Linearkombinationen von $e^{\mathrm{i}\varphi}$ und $e^{-\mathrm{i}\varphi}$?

   iii. Aus der Differentialrechnung wissen wir: $[\sin\varphi]' = \cos\varphi$ und $[\cos\varphi]' = -\sin\varphi$.
   Bestätige diese Ableitungen mittels der unter ii. hergeleiteten Linearkombinationsausdrücke.
   Hinweis: Ja, $e^{\mathrm{i}\varphi}$ und $e^{-\mathrm{i}\varphi}$ lassen sich wie gewohnt nach φ ableiten. Dabei entstehen natürlich innere Ableitungen!

2. *Die ebene Welle als Lösung der Schrödinger-Gleichung für das freie Teilchen*

   Wir denken uns ein freies Teilchen mit Masse, also z.B. ein Elektron, das im Weltraum unterwegs ist. Auch wenn eine **ebene Welle**, die wir jetzt gleich mathematisch betrachten werden, dieses Elektron alleine nicht korrekt zu beschreiben vermag, so sind ebene Wellen für diese Beschreibung doch von zentraler Bedeutung, weil sich die korrekte Beschreibung dann eben aus mehreren – tatsächlich unendlich vielen – solchen ebenen Wellen zusammensetzen lässt, wie wir noch sehen werden. Es ist also doch nicht so falsch, bei der ebenen Welle an unser freies Elektron im Weltraum zu denken.

   Wie wir im Theorie-Text *Die Schrödinger-Gleichung für das freie Teilchen* lesen, wird eine einzelne ebene Welle beschrieben durch:

   $$\Psi(x,t) = A\, e^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} \quad , \tag{1}$$

   $\Psi(x,t)$ ist eine **komplexe Funktion**. Der Wert von $\Psi(x,t)$ ist also zu jedem Zeitpunkt t und an jedem Ort x eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$, die sich als ein Punkt in einem zweidimensionalen Koordinatensystem interpretieren lässt (Gauss'sche Zahlenebene).

   Mittels der Euler-Formel $e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi$ lässt sich $\Psi(x,t)$ auf zwei reelle Funktionen zurückführen:

   $$\Psi(x,t) = \underbrace{\Psi_{\mathrm{re}}(x,t)}_{=\,\mathrm{Re}\,\Psi(x,t)} + \mathrm{i}\cdot \underbrace{\Psi_{\mathrm{im}}(x,t)}_{=\,\mathrm{Im}\,\Psi(x,t)} = A\,\cos(kx-\omega t) + \mathrm{i}\cdot A\,\sin(kx-\omega t) \tag{2}$$

   Dabei bezeichnen wir $\Psi_{\mathrm{re}}(x,t)$ ist der **Realteil** und $\Psi_{\mathrm{im}}(x,t)$ der **Imaginärteil** von $\Psi(x,t)$. Halten wir das Ganze noch in der Abbildungsschreibweise für Funktionen fest:

   $$\begin{array}{rccc} \Psi: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}\ (\widehat{=}\,\mathbb{R}^2) \\ & (x,t) & \longmapsto & \Psi(x,t) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \Psi_{\mathrm{re}}: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \longmapsto & \mathrm{Re}\,\Psi(x,t) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \Psi_{\mathrm{im}}: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \longmapsto & \mathrm{Im}\,\Psi(x,t) \end{array}$$

   (a) Der Betrag $|z|$ einer komplexen Zahl ist allgemein durch $|z| := \sqrt{(\mathrm{Re}\,z)^2 + (\mathrm{Im}\,z)^2}$ gegeben. Zeige damit, dass bei der Wellenfunktion unserer ebenen Welle folgt:

   $$|\,\Psi(x,t)|^2 = A^2 \tag{3}$$

   (b) Ist eine komplexe Zahl in ihrer Euler-Darstellung gegeben, so geht die Berechnung ihres Betragsquadrates unter Verwendung von $|z|^2 = z^*\cdot z$ wesentlich speditiver. Zeige damit unter Verwendung von (1) nochmals, dass $|\,\Psi(x,t)|^2 = A^2$ stimmt. Weshalb fällt diese Berechnung so leicht?

   (c) Im Skript wird gesagt, dass die durch (1) gegebene Wellenfunktion die Schrödinger-Gleichung für das freie Teilchen löst. Zeige, dass dies stimmt, sofern zudem gilt:

   $$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \hbar\omega \quad . \tag{4}$$

   (d) Ein Elektron bewegt sich entlang der x-Achse mit einem wohldefinierten Impuls von $5\cdot 10^{-25}\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}$. Formuliere einen Ausdruck für die zu diesem Elektron gehörende ebene Materiewelle. Füge numerische Werte ein, soweit das sinnvoll ist.

   Hinweis: Wir gehen davon aus, dass es sich um ein nicht-relativistisches Elektron handelt, sodass wir direkt die dafür gültigen Beziehungen für Impuls und Energie zu Beginn von Übungsserie 10 verwenden dürfen.

3. *Grundsätzliches zu Schrödinger-Gleichung und Wellenfunktionen*

   (a) Setze die rein reelle Wellenfunktion $\Psi(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$ in die Schrödinger-Gleichung für das freie Teilchen ein und zeige, dass diese Schrödinger-Gleichung damit unmöglich für alle Wertepaare (x,t) erfüllt werden kann.

   (b) Weil wir keine Möglichkeit kennen, die Quantenmechanik auf Grundlage einer einzelnen reellen Wellenfunktion zu formulieren, müssen wir eine Entscheidung treffen. Offenbar ist die Wahl komplexer Zahlen "praktisch". Zeige, dass die Schrödinger-Gleichung für das freie Teilchen zwei *reellen* Gleichungen mit den beiden folgenden *reellen* Funktionen entspricht:

$$\hbar\,\frac{\partial\,\Psi_{\mathrm{im}}(x,t)}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\partial^2\,\Psi_{\mathrm{re}}(x,t)}{\partial x^2} \qquad \text{und} \qquad \hbar\,\frac{\partial\,\Psi_{\mathrm{re}}(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\partial^2\,\Psi_{\mathrm{im}}(x,t)}{\partial x^2}$$

   Dabei ist $\Psi(x,t)$ per Definition gegeben durch $\Psi(x,t) = \Psi_{\mathrm{re}}(x,t) + \mathrm{i}\,\Psi_{\mathrm{im}}(x,t)$. Inwiefern ist der komplexe Ansatz sinnvoller als der hier vorgestellte?

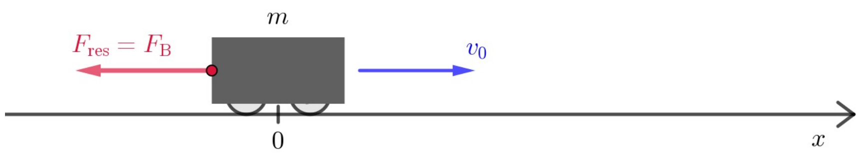
Vorbemerkung zur Aufgabe 4

In der letzten Aufgabe dieser Übungsserie vertiefen wir unser differentielles Verständnis der Newton'schen Mechanik. Das Zweite Newton'sche Axiom, also das *Aktionsprinzip*, legt fest, wie die Bewegung eines Körpers weitergeht. Dabei handelt es sich um eine *gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung* für die *Ortsfunktion* $x(t)$, wobei die 1. Ableitung als *Geschwindigkeitsfunktion* $v(t) = x'(t)$ und die 2. Ableitung als *Beschleunigungsfunktion* $a(t) = v'(t) = x''(t)$ zu verstehen sind. Die auf den Körper wirkenden Kräfte treten in dieser Differentialgleichung auf. Ihre allgemeine Lösung beinhaltet eine ganze Schar von Ortsfunktionen $x(t)$. Der eindeutige Bewegungsablauf wird erst durch zwei *Randbedingungen* festgelegt.

Es geht nicht darum, dass du selber den allgemeinen Funktionsansatz zur Lösung der DGL findest. Vielmehr gebe ich diesen Ansatz vor und du verifizierst, dass er die DGL tatsächlich löst. Hinterher ermittelst du unter Ausnutzung der Anfangsbedingungen die noch nicht festgelegten Funktionsparameter. Leite also jeweils den Ansatz für die Ortsfunktionen $x(t)$ zweimal ab, um Ausdrücke für $v(t)$ und $a(t)$ zu erhalten, und bestimme anschliessend aufgrund der weiteren Angaben die fehlenden Parameter A und B. Überlege dir, welche physikalische Dimension resp. Bedeutung A und B haben (Länge? Ort? Geschwindigkeit? Etc.).

4. *Zwei Reibungsarten: Veranschaulichungen zum Aktionsprinzip als Differentialgleichung*

Es gibt verschiedene Effekte, die ein Objekt in Bewegung abbremsen können. Hier wollen wir zwei Beispiele an einem rollenden Wagen betrachten: Einerseits eine von der Geschwindigkeit v unabhängige Gleit- oder Rollreibung, andererseits eine Wirbelstrombremse, deren Bremswirkung proportional zur momentanen Geschwindigkeit v ist. In beiden Fällen habe der Wagen anfangs (zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $x = 0$) die Geschwindigkeit v_0. Wir interessieren uns für die Strecke und die Zeitspanne bis zum Stillstand:



Stets soll die abbremsende Kraft F_{B} die einzige auf den Wagen wirkende Kraft sein, d.h. $F_{\text{res}} = F_{\text{B}}$. Da die Bewegung in die positive Richtung der x-Achse erfolgt, ist $v_0 > 0$. F_{B} wirkt dieser Bewegung entgegen, muss also als negative Kraft aufgefasst werden: $F_{\text{B}} < 0$.

(a) *Konstante Reibungskraft (z.B. Rollreibung)*

Die Reibungskraft habe einen konstanten Wert, also $F_{\text{B}} = -\mu F_{\text{N}} = -\mu F_{\text{G}} = -\mu mg$, den wir als gegeben erachten, sodass sich mit dem Aktionsprinzip eine Differentialgleichung notieren lässt:

$$F_{\text{res}} = F_{\text{B}} \stackrel{!}{=} m \cdot a \qquad \Rightarrow \qquad -\mu mg = m \cdot x''(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad x''(t) = -\mu g$$

i. Zeige, dass der Ansatz $x(t) = A + Bt + Ct^2$ diese DGL löst, wenn C auf eine bestimmte Weise von den gegebenen Parametern μ und g abhängt.

ii. Wie setzen sich A und B aus v_0, μ und g zusammen und wofür stehen sie?
Tipp: Randbedingungen einsetzen!

iii. Gib zudem in Abhängigkeit von v_0, μ und g an, wie weit der Wagen ausrollt (x_{end}) und wie lange der Abbremsvorgang dauert (t_{end}).

iv. Es seien $v_0 = 1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\mu = 0.02$ und $g = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Berechne x_{end} und t_{end} und lasse dir von *GeoGebra* die drei Funktionen $x(t)$, $v(t)$ und $a(t)$ bis zum Stillstand aufzeichnen.

(b) *Bremskraft proportional zu v (z.B. Wirbelstrombremsung)*

Nun sei die abbremsende Kraft proportional zur momentanen Geschwindigkeit v, also $F = -\beta \cdot v$. Mit dem Aktionsprinzip schreiben wir:

$$F_{\text{res}} = F_{\text{B}} = -\beta v \stackrel{!}{=} ma \qquad \Rightarrow \qquad -\beta x'(t) = mx''(t)$$

Das scheint kompliziert zu sein, denn hier kommt die Ortsfunktion $x(t)$ selber gar nicht mehr vor, sondern nur noch ihre 1. und ihre 2. Ableitung. Das braucht uns nun aber gar nicht zu beunruhigen, denn der passende Funktionsansatz wird hier vorgegeben:

$$x(t) = A + B \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

i. Zeige, dass dieser Ansatz obige DGL erfüllt, falls λ auf eine bestimmte Art von den gegebenen Parametern β und m abhängt.

ii. Benutze die Randbedingungen um anzugeben, wie sich A und B aus v_0, β und m zusammensetzen.

iii. Versuche nun in Abhängigkeit von v_0, β und m anzugeben, wie weit der Wagen ausrollt und wie lange der Abbremsvorgang dauert.

iv. Es seien $m = 2\,\text{kg}$, $\beta = 0.1\,\frac{\text{N}}{\text{m/s}}$ und $v_0 = 1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Lasse dir von *GeoGebra* die drei Funktionen $x(t)$, $v(t)$ und $a(t)$ aufzeichnen.

v. Welche physikalische Bedeutung haben die beiden Parameter A und B?