## Übungen zum EF Physik des 20. Jahrhunderts

# Serie 12: Komplexe Zahlen, freies Teilchen und Differentialgleichungen der klassischen Mechanik – LÖSUNGEN

1. *Ein paar Übungen mit komplexen Zahlen*

   (a) Mit $z_1 = 1 - 2\mathrm{i}$, $z_2 = -2 + \mathrm{i}$ und $z_3 = -3 - 4\mathrm{i}$ ergibt sich:

   i. $z_1 \cdot z_2 + z_3 = (1-2\mathrm{i})(-2+\mathrm{i}) + (-3-4\mathrm{i}) = -2 + \mathrm{i} + 4\mathrm{i} - 2\mathrm{i}^2 - 3 - 4\mathrm{i} = -3 + \mathrm{i}$

   ii. $(z_2 - z_1) \cdot z_3 = \big(-2 + \mathrm{i} - (1-2\mathrm{i})\big)(-3-4\mathrm{i}) = (-3+3\mathrm{i})(-3-4\mathrm{i}) = 21 + 3\mathrm{i}$

   iii. $z_1^* \cdot z_2 \cdot z_3^* = (1+2\mathrm{i})(-2+\mathrm{i})(-3+4\mathrm{i}) = (-4-3\mathrm{i})(-3+4\mathrm{i}) = 24 - 7\mathrm{i}$

   iv. $|z_3|^2 - |z_2| \cdot |z_1| = 3^2 + 4^2 - \sqrt{1^2+2^2} \cdot \sqrt{2^2+1^2} = 25 - \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 20$

   (b) Wir erhalten:

   $$\mathrm{i}^0 = 1 \qquad \mathrm{i}^1 = \mathrm{i} \qquad \mathrm{i}^2 = -1 \qquad \mathrm{i}^3 = \mathrm{i}^2 \cdot \mathrm{i} = -\mathrm{i} \qquad \mathrm{i}^4 = (\mathrm{i}^2)^2 = (-1)^2 = 1 \qquad \text{etc.}$$

   Ganz allgemein gilt für $n \in \mathbb{Z}$: $\mathrm{i}^{4n} = 1\,,\quad \mathrm{i}^{4n+1} = \mathrm{i}\,,\quad \mathrm{i}^{4n+2} = -1\,,\quad \mathrm{i}^{4n+3} = -\mathrm{i}$

   (c) Wir landen wieder bei Potenzen von $\mathrm{i}$:

   $$z_1 = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}\,,\quad z_2 = e^{\mathrm{i}\pi} = -1\,,\quad z_3 = e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} = -\mathrm{i}\,,\quad z_4 = e^{\mathrm{i}\,2\pi} = 1\,,\quad z_5 = e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = -\mathrm{i}$$

   (d) Die Umwandlung von der Euler-Darstellung in die Summenschreibweise ist vergleichsweise simpel, weil $e^{\mathrm{i}\varphi}$ einfach durch die Euler-Formel als Summe $\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ geschrieben werden kann. Danach sollte man noch die exakten Werte der hier enthaltenen Winkelkoordinaten kennen:

   $$z_1 = 2\,e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}$$

   $$z_2 = 2\sqrt{3}\,e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{-\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{-\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} - 3\mathrm{i}$$

   $$z_3 = \frac{\sqrt{2}}{3}\,e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\,\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{6} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2}}{6}$$

   (e) Die Berechnung des Betrages $r$ fällt leicht: $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Bei der Winkelkoordinate $\varphi$ ist es ein wenig umständlicher. Sicher ist, dass $\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{y}{x}$. Das bedeutet, es muss wohl mit $\arctan(\frac{y}{x})$ gearbeitet werden. Allerdings ist der Tangens $\pi$-periodisch und nicht etwa $2\pi$-periodisch. Das bedeutet, die Umkehrfunktion Arcustangens deckt sicher nicht den gesamten Winkelbereich von z.B. $-\pi < \varphi \leq \pi$ ab. Effektiv ist Arcustangens beschränkt auf das Zielintervall $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$. Die Arcustangensfunktion kann keine anderen Werte ausgeben.

   Es ist auch ganz klar, weshalb da eine Problematik entsteht, denn wenn wir z.B. zwei komplexe Zahlen $2+\mathrm{i}$ und $-2-\mathrm{i}$ betrachten, so ergibt $\frac{y}{x}$ in beiden Fällen einfach $\frac{1}{2}$, womit dann auch der Arcustangens dieses Verhältnisses denselben Wert aufweisen würde.

   Effektiv bleibt uns nichts anderes übrig, als nach der Arcustangensberechnung nochmals über den Winkel nachzudenken. Für komplexe Zahlen im 1. und im 4. Quadranten der Gauss'schen Zahlenebene ist alles in Ordnung, aber für Zahlen im 2. und im 3. Quadranten müssen wir die Winkelkoordinate hinterher noch anpassen, sodass sie wirklich in den jeweiligen Quadranten passt.

Die Aufgabe enthält vier Zahlen, die alle in einem anderen Quadranten liegen, sodass wir das oben Gesagte nun vollständig in Beispielen zu sehen bekommen:

$$z_1 = 3 + 3\mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{1. Quadrant} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan\left(\frac{3}{3}\right) = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2\sqrt{3}\, e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

$$z_2 = -3 + \sqrt{3}\,\mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{2. Quadrant} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-3}\right) + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad z_2 = 2\sqrt{3}\, e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$$

$$z_3 = -5 - 5\mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\text{3. Quadrant} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan\left(\frac{-5}{-5}\right) - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad z_3 = 5\sqrt{2}\, e^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$$

$$z_4 = 1 - 4\mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

$$\text{4. Quadrant} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan\left(\frac{-4}{1}\right) \approx -1.326 \quad \Rightarrow \quad z_4 \approx \sqrt{17}\, e^{-1.326\mathrm{i}}$$

(f) Eine komplexe Zahl zu konjugieren bedeutet, den zugehörigen Punkt in der Gauss'schen Zahlenebene an der reellen Achse ($x$-Achse) zu spiegeln. Das bedeutet, um zu $z^*$ zu gelangen, muss von der reellen Achse aus nicht mehr der Winkel $\varphi$, sondern stattdessen der Winkel $-\varphi$ abgetragen werden. Am Betrag $r$ der Zahl ändert das Konjugieren nichts. Wir halten somit fest:

$$z = r\, e^{\mathrm{i}\varphi} \qquad \Rightarrow \qquad z^* = r\, e^{-\mathrm{i}\varphi}$$

(g) i. Wir können das direkt durch Verwendung der Summenschreibweise zeigen:

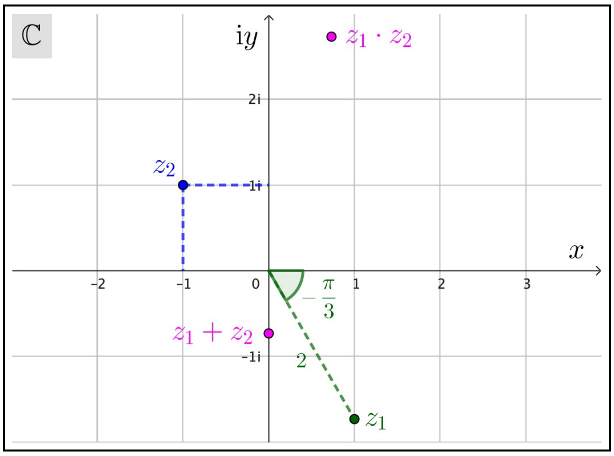
$$\sqrt{z^* \cdot z} = \sqrt{(x + y\mathrm{i})(x - y\mathrm{i})} = \sqrt{x^2 - (y\mathrm{i})^2} = \sqrt{x^2 - y^2\mathrm{i}^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

ii. Aus Aufgabe (f) wissen wir, dass das komplex Konjugierte von $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$ in der Euler-Darstellung durch $z^* = re^{-\mathrm{i}\varphi}$ gegeben ist. Somit folgt:

$$z^* \cdot z = r\, e^{-\mathrm{i}\varphi} \cdot r\, e^{\mathrm{i}\varphi} = r^2\, e^{\mathrm{i}(-\varphi + \varphi)} = r^2\, e^0 = r^2 = |z|^2$$

In der Euler-Darstellung $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$ ist $r$ eben genau der Betrag von $z$. Die Winkelkoordinate muss bei der Betragsberechnung ganz unbedingt wegfallen!

(h) Wir erhalten die rechts gezeigten Punkte.




(i) Die Multiplikation einer komplexen Zahl $z$ erzeugt eine Drehung von $90°$ im Gegenuhrzeigersinn um den Ursprung der komplexen Zahlenebene. Es findet keine Streckung zum oder weg vom Ursprung statt, weil $|e^{\mathrm{i}\varphi}| = 1$.
Die Zahl $-1 + 3\mathrm{i}$ hat den Realteil $-1$ und den Imaginärteil $3$ und befindet sich im 2. Quadranten. Drehen wir diese Zahl um $90°$ im Gegenuhrzeigersinn um den Ursprung, so wird der neue Realteil $-3$ und der neue Imaginärteil $-1$ sein. Es gilt also:

$$e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(-1 + 3\mathrm{i}) = -3 - \mathrm{i}$$

Die neue Zahl befindet sich jetzt im 3. Quadranten.

(j) **Fakultative Zusatzaufgabe:** Wir haben die Euler-Formel kennengelernt: $e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$. Offenbar lässt sich die Exponentialfunktion $e^{\mathrm{i}\varphi}$ als Linearkombination ($\widehat{=}$ Summe) einer Cosinus- und einer Sinusfunktion notieren.

i. Wir können die Antwort direkt aufschreiben:

$$e^{-\mathrm{i}\varphi} = \cos(-\varphi) + \mathrm{i}\sin(-\varphi) = \cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi$$

ii. Nun können wir die beiden Gleichungen

$$\left| \begin{array}{r@{\,}l} e^{\mathrm{i}\varphi} &= \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi \\ e^{-\mathrm{i}\varphi} &= \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{①} \\ \text{②} \end{array}$$

als Gleichungssystem für die beiden "Unbekannten" $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ auffassen. Daraus folgt:

$$\text{①} + \text{②}: \quad e^{\mathrm{i}\varphi} + e^{-\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi + \cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi = 2\cos\varphi$$

$$\text{①} - \text{②}: \quad e^{\mathrm{i}\varphi} - e^{-\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi - \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi = 2\mathrm{i}\sin\varphi$$

Somit lassen sich $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ als Linearkombinationen von $e^{\mathrm{i}\varphi}$ und $e^{-\mathrm{i}\varphi}$ notiert werden:

$$\cos\varphi = \frac{e^{\mathrm{i}\varphi} + e^{-\mathrm{i}\varphi}}{2} \qquad \text{und} \qquad \sin\varphi = \frac{e^{\mathrm{i}\varphi} - e^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}}$$

iii. Zunächst leiten wir den Ausdruck für $\sin\varphi$ ab (ist ein wenig einfacher):

$$\begin{aligned} [\sin\varphi]' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{e^{\mathrm{i}\varphi} - e^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}}\right) = \frac{e^{\mathrm{i}\varphi}\cdot\mathrm{i} - e^{-\mathrm{i}\varphi}\cdot(-\mathrm{i})}{2\mathrm{i}} \\ &= \frac{\mathrm{i}\big(e^{\mathrm{i}\varphi} + e^{-\mathrm{i}\varphi}\big)}{2\mathrm{i}} = \frac{e^{\mathrm{i}\varphi} + e^{-\mathrm{i}\varphi}}{2} = \cos\varphi \end{aligned}$$

Und ebenso für $\cos\varphi$:

$$\begin{aligned} [\cos\varphi]' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{e^{\mathrm{i}\varphi} + e^{-\mathrm{i}\varphi}}{2}\right) = \frac{e^{\mathrm{i}\varphi}\cdot\mathrm{i} + e^{-\mathrm{i}\varphi}\cdot(-\mathrm{i})}{2} \\ &= \frac{\mathrm{i}\big(e^{\mathrm{i}\varphi} - e^{-\mathrm{i}\varphi}\big)}{2}\cdot\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}} = -\frac{e^{\mathrm{i}\varphi} - e^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}} = -\sin\varphi \end{aligned}$$

Wir sehen, wie die inneren Ableitungen $\mathrm{i}$ und $-\mathrm{i}$ der Exponenten im Komplexen die entscheidende Rolle spielen.

2. *Die ebene Welle als Lösung der Schrödinger-Gleichung für das freie Teilchen*

   **Diese Lösungen werden zu einem späteren Zeitpunkt verfasst!**

3. *Grundsätzliches zu Schrödinger-Gleichung und Wellenfunktionen*

   **Diese Lösungen werden zu einem späteren Zeitpunkt verfasst!**

4. *Zwei Reibungsarten: Veranschaulichungen zum Aktionsprinzip als Differentialgleichung*

(a) *Konstante Reibungskraft (z.B. Rollreibung)*

i. Zuerst leiten wir den gegebenen Funktionsansatz zweimal ab:

$$x(t) = A + Bt + Ct^2 \qquad \Rightarrow \qquad x'(t) = B + 2Ct \qquad \Rightarrow \qquad x''(t) = 2C$$

Soll die DGL stimmen so folgt:

$$x''(t) = 2C = -\mu g \qquad \Leftrightarrow \qquad C = -\frac{\mu g}{2} \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = A + Bt - \frac{\mu g}{2}\,t^2$$

ii. Dies ist die allgemeine Lösung für die Bewegung eines Körpers bei konstanter Bremsbeschleunigung $-\mu g$. Sie muss nun noch an die Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $v(0) = x'(0) = v_0$ angepasst werden. Hierdurch werden die beiden Parameter $A$ und $B$ festgelegt:

$$x(0) = A \stackrel{!}{=} 0 \qquad \text{und} \qquad x'(0) = B \stackrel{!}{=} v_0 \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = v_0 t - \frac{\mu g}{2}\,t^2$$

Das ist die altbekannte Bewegungsgleichung $x(t) = v_0 t + \frac{a}{2}\,t^2$ zur gleichmässig beschleunigten Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit $v_0$ und Beschleunigung $a = -\mu g$ (Startort $x_0 = 0$).

iii. Der Wagen steht still, wenn $v(t) = 0$ ist. Daraus folgt für die Zeit $t_{\text{end}}$ bis zum Stillstand:

$$v(t_{\text{end}}) = v_0 - \mu g\, t_{\text{end}} \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad t_{\text{end}} = \frac{v_0}{\mu g}$$

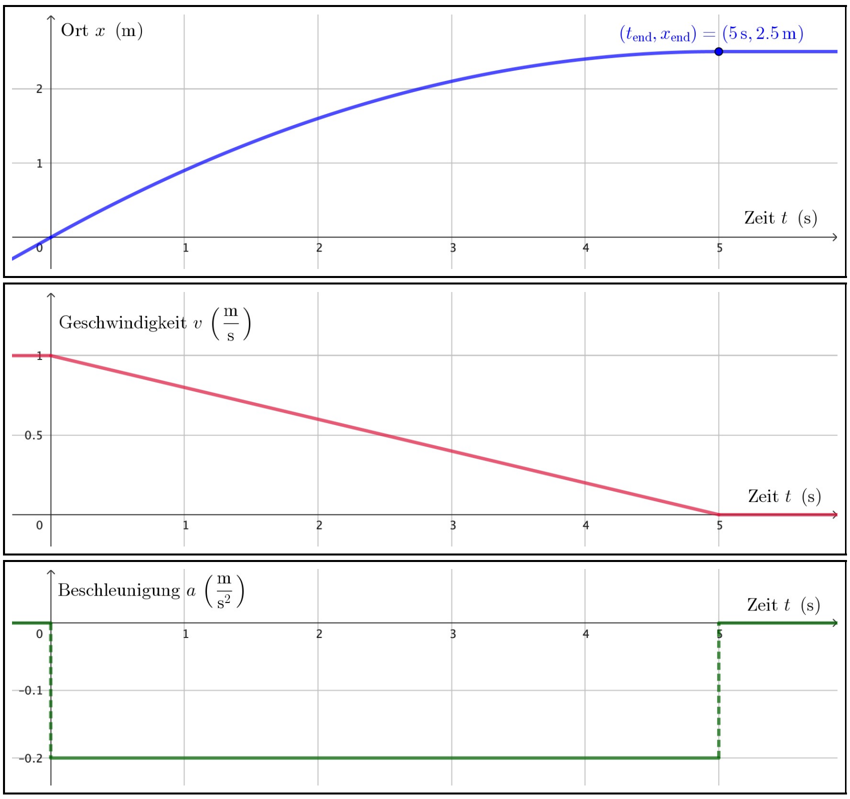
Und somit ergibt sich für den Ort des Stillstandes resp. für die zurückgelegte Strecke:

$$x_{\text{end}} = x(t_{\text{end}}) = v_0 \cdot \frac{v_0}{\mu g} - \frac{\mu g}{2}\left(\frac{v_0}{\mu g}\right)^2 = \frac{v_0^2}{\mu g} - \frac{v_0^2}{2\mu g} = \frac{v_0^2}{\mu g} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{v_0^2}{2\mu g}$$

iv. Für die Dauer der Bremsung und die Bremsstrecke erhalten wir:

$$t_{\text{end}} = \frac{v_0}{\mu g} = \frac{1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{0.02 \cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 5\,\text{s} \qquad \text{und} \qquad x_{\text{end}} = \frac{v_0^2}{2\mu g} = \frac{\left(1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 0.02 \cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 2.5\,\text{m}$$

Hier die zugehörigen Bewegungsdiagramme:



(b) *Bremskraft proportional zu $v$ (z.B. Wirbelstrombremsung)*

i. Erneut starten wir mit dem Ableiten des Funktionsansatzes:

$$x(t) = A + B\,e^{-\lambda t} \qquad \Rightarrow \qquad x'(t) = -\lambda B\,e^{-\lambda t} \qquad \Rightarrow \qquad x''(t) = \lambda^2 B\,e^{-\lambda t}$$

Einsetzen in die DGL liefert:

$$-\beta x'(t) = m x''(t) \quad \Rightarrow \quad -\beta(-\lambda B)\,e^{-\lambda t} = m\lambda^2 B\,e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \beta = m\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{\beta}{m}$$

Der Ansatz löst also diese lineare, homogene DGL 2. Ordnung (die Variable $t$ fällt komplett raus), wenn für den Parameter $\lambda$ gilt: $\lambda = \frac{\beta}{m}$.

ii. Die Parameter $A$ und $B$ werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt:

$$x'(0) = -\lambda B\,e^0 = -\lambda B \stackrel{!}{=} v_0 \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{v_0}{\lambda} = -\frac{v_0 m}{\beta}$$

$$x(0) = A + B\,e^0 = A + B \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad A = -B = \frac{v_0 m}{\beta}$$

Damit folgt für die eindeutige Funktion und ihre beiden Ableitungen:

$$x(t) = A + B\,e^{-\lambda t} = \frac{v_0 m}{\beta} - \frac{v_0 m}{\beta}\cdot e^{-\frac{\beta}{m}t} = \frac{v_0 m}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}\right)$$

$$x'(t) = -\lambda B\,e^{-\lambda t} = \frac{\beta}{m}\cdot\frac{v_0 m}{\beta}\cdot e^{-\frac{\beta}{m}t} = v_0\,e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

$$x''(t) = \lambda^2 B\,e^{-\lambda t} = \left(\frac{\beta}{m}\right)^2\cdot\left(-\frac{v_0 m}{\beta}\right)\cdot e^{-\frac{\beta}{m}t} = -\frac{v_0\beta}{m}\cdot e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

iii. Die Geschwindigkeit nimmt somit exponentiell ab. Daraus folgt für die Bremszeit $t_{\text{end}}$:

$$v(t_{\text{end}}) = v_0\,e^{-\frac{\beta}{m}t_{\text{end}}} \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad e^{-\frac{\beta}{m}t_{\text{end}}} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{\text{end}} = ?$$

Die Gleichung für $t_{\text{end}}$ hat keine Lösung, denn die abfallende Exponentialfunktion $e^{-\frac{\beta}{m}t_{\text{end}}}$ nimmt niemals den Wert $0$ an. Sie kommt dem Wert $0$ für $t_{\text{end}} \to \infty$ nur beliebig nahe. Das führt uns zur komischen Aussage, dass der Wagen unendlich lange weiter rollt, also eigentlich nie zum Stillstand kommt.

Ergibt es dann überhaupt Sinn nach der Strecke bis zum Stillstand zu fragen? Müsste der Wagen jetzt nicht unendlich weit rollen? Die Antwort lautet: Nein! Für unsere Ortsfunktion ergibt sich nämlich im Limes für $t \to \infty$:

$$x_{\text{end}} = \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{v_0 m}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}\right) = \frac{v_0 m}{\beta}\cdot(1-0) = \frac{v_0 m}{\beta}$$

D.h., der Wagen kommt dem Ort $x_{\text{end}} = \frac{v_0 m}{\beta}$ beliebig nahe, erreicht ihn aber streng genommen niemals!

In der Realität stimmt das ewige Weiterfahren natürlich nicht, denn es gibt erstens das perfekt reibungsfreie Rollen nicht, d.h., es käme noch eine Rollreibung vergleichbar mit derjenigen unter (a) hinzu. Aber selbst wenn es die perfekt reibungsfreie Rollbahn gäbe, würde die Exponentialfunktion $x(t)$ in nicht allzu langer Zeit so nahe an $x_{\text{end}}$ heranrücken, dass der Unterschied zu $x_{\text{end}}$, also $\frac{v_0 m}{\beta}\cdot e^{-\frac{\beta}{m}t}$, unter eine Haarbreite fallen würde. In iv. rechne ich das mit den gegebenen Werten mal kurz durch.

Auf jeden Fall wäre die makroskopisch beobachtbare Bewegung rasch zuende.

iv. Zunächst stellen wir fest, dass $x''(t)$ für $t = 0$ den Wert $-\frac{v_0\beta}{m}$ ergibt. Daher muss dieser negative Bruch als Anfangsbeschleunigung aufgefasst werden. Zusammen mit $x_{\text{end}} = \frac{v_0 m}{\beta}$ können wir die Bewegungsfunktionen nochmals übersichtlicher notieren:

$$x(t) = x_{\text{end}} - x_{\text{end}}\, e^{-\frac{\beta}{m}t} = x_{\text{end}}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}\right) \qquad \text{mit} \quad x_{\text{end}} = \frac{v_0 m}{\beta}$$

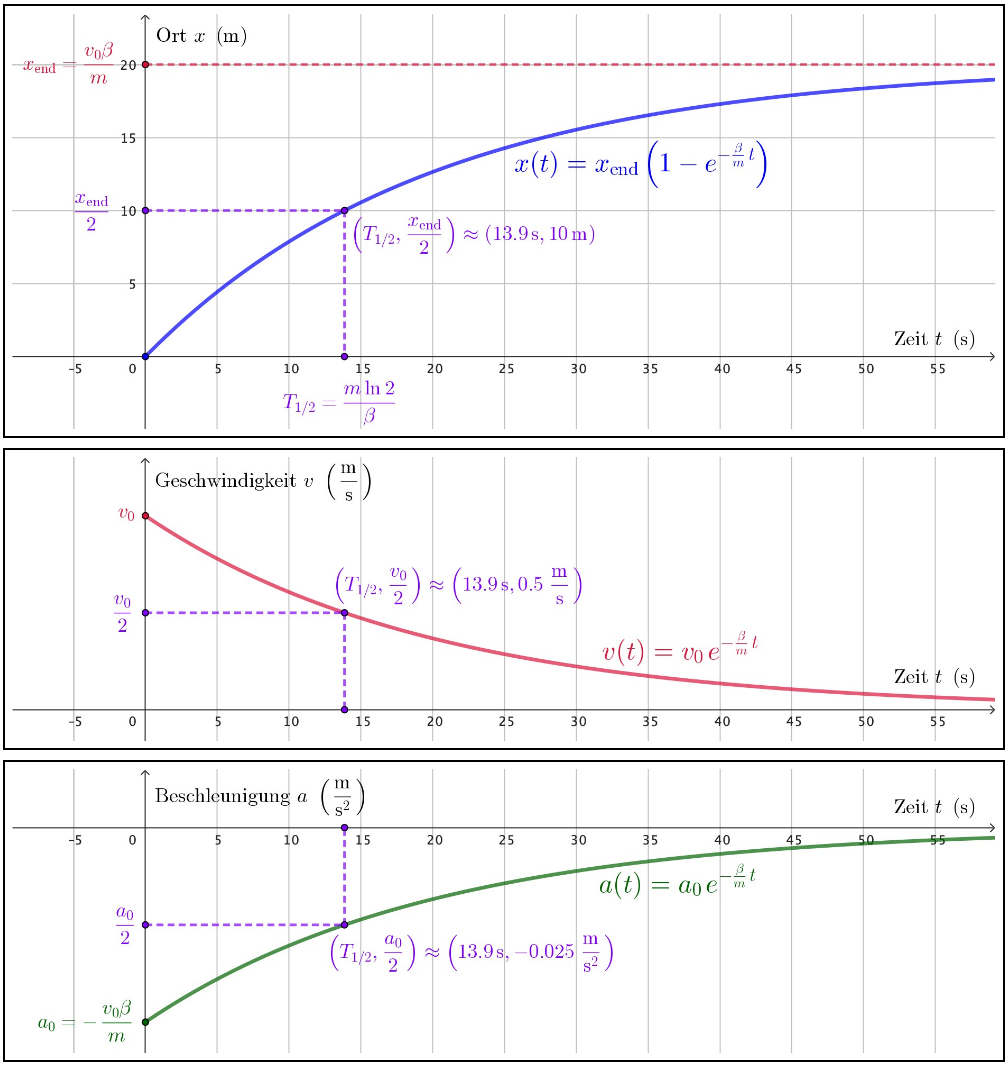
$$v(t) = x'(t) = v_0\, e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

$$a(t) = x''(t) = a_0\, e^{-\frac{\beta}{m}t} \qquad \text{mit} \quad a_0 = -\frac{v_0\beta}{m}$$

Wir setzen die gegebenen Werte ein und erhalten für $x_{\text{end}}$ und $a_0$:

$$x_{\text{end}} = \frac{v_0 m}{\beta} = \frac{1\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2\,\text{kg}}{0.1\,\frac{\text{N}}{\text{m/s}}} = 20\,\text{m} \qquad \text{und} \qquad a_0 = -\frac{v_0\beta}{m} = -\frac{1\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0.1\,\frac{\text{N}}{\text{m/s}}}{2\,\text{kg}} = -0.05\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Damit lassen sich die drei Bewegungsdiagramme bequem skizzieren:



Wie immer bei abnehmenden Exponentialfunktionen können wir die Halbwertzeit $T_{1/2}$ berechnen, die uns sofort ein besseres quantitatives Verständnis ermöglicht:

$$v(T_{1/2}) = v_0\, e^{-\frac{\beta}{m} T_{1/2}} \overset{!}{=} \frac{v_0}{2} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\frac{\beta}{m} T_{1/2}} \overset{!}{=} \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad T_{1/2} = \frac{m \ln 2}{\beta} = \frac{2\,\mathrm{kg} \cdot \ln 2}{0.1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m/s}}} \approx 13.9\,\mathrm{s}$$

Nach etwa $14\,\mathrm{s}$ ist die halbe Strecke bis $x_{\mathrm{end}}$ zurückgelegt und sowohl die Geschwindigkeit, als auch die Beschleunigung sind auf die Hälfte ihrer Anfangswerte gesunken.
Nun möchte ich noch beantwortet haben, nach welcher Zeit der Wagen nur noch eine bestimmte Länge $d$ von $x_{\mathrm{end}}$ entfernt ist. Dafür folgt:

$$x_{\mathrm{end}} - x(t) = x_{\mathrm{end}}\, e^{-\frac{\beta}{m} t} \overset{!}{=} d \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{m}{\beta} \cdot \ln\left(\frac{d}{x_{\mathrm{end}}}\right) = \frac{m}{\beta} \cdot \ln\left(\frac{x_{\mathrm{end}}}{d}\right)$$

Dabei habe ich ausgenutzt, dass $-\ln\frac{a}{b} = \ln\frac{b}{a}$ ist.
Bestimmen wir damit, nach welcher Zeit der Wagen nur noch eine typische Haardicke (ca. $75\,\mathrm{\mu m}$) von $x_{\mathrm{end}}$ entfernt ist:

$$t_{\mathrm{Haar}} = \frac{m}{\beta} \cdot \ln\frac{x_{\mathrm{end}}}{d_{\mathrm{Haar}}} = \frac{2\,\mathrm{kg}}{0.1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m/s}}} \cdot \ln\frac{20\,\mathrm{m}}{0.000\,075\,\mathrm{m}} \approx 250\,\mathrm{s}$$

Makroskopisch hat der Wagen also nach etwa vier Minuten angehalten.

v. Wie wir schon längst herausgefunden haben, stehen $A = -B = \frac{v_0 m}{\beta} = x_{\mathrm{end}}$ für die Endweite, der der Wagen für $t \to \infty$ unendlich nahe kommt.