Übungen zum EF Physik des 20. Jahrhunderts

Serie 11: Ein Mini-Einblick in die Welt der Differentialgleichungen

1. *Integrieren $\widehat{=}$ Lösen von linearen, inhomogenen Differentialgleichungen 1. Ordnung*

   Als **Stammfunktion** einer Funktion $r(x)$ bezeichnen wir jede Funktion $f(x)$, deren Ableitung durch $r(x)$ gegeben ist, also:

   $$f'(x) = r(x)$$

   Das Aufspüren einer solcher Stammfunktionen ist in der **Integralrechnung** eine wichtige Fähigkeit. $r(x)$ muss nicht ab-, sondern stattdessen "aufgeleitet" werden. Man sagt: "Es wird über r **integriert**".

   Wir bemerken: Die Gleichung oben, die nach der Funktion $f(x)$ sucht, legt diese Lösungsfunktion $f(x)$ noch nicht eindeutig fest. Wir benötigen *genau eine* sogenannte **Randbedingung (RB)**. Die allgemeine Lösung lautet nämlich $f(x) + C$, wobei C für irgendeine **Integrationskonstante** steht, die beim Ableiten von $f(x)$ wieder wegfällt und die folglich für $r(x)$ keine Rolle spielt. Erst durch die Randbedingung wird der Wert von C eindeutig festgelegt.

   Beispiel: Differentialgleichung: $f'(x) = -4x^2$ mit Randbedingung: $f\big(\sqrt{3}\big) = 2\sqrt{3}$.

   Allgemeine Lsg. der DGL: $f(x) = -\frac{4}{3}\,x^3 + C$ denn so ist: $f'(x) = \big[-\frac{4}{3}\,x^3 + C\big]' = -4x^2$.

   Erfüllung der RB: $f\big(\sqrt{3}\big) = -\frac{4}{3}\,\big(\sqrt{3}\big)^3 + C = -4\sqrt{3} + C \overset{!}{=} 2\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad C = 6\sqrt{3}$

   $\Rightarrow$ eindeutige Lösung des Problems: $f(x) = -\frac{4}{3}\,x^3 + 6\sqrt{3}$

   Tipp – Kontrolle: Nachdem du meinst, die allgemeine Lösung $f(x) + C$ aufgespürt zu haben, solltest du sie zur Kontrolle unbedingt nochmals ableiten und dich von ihrer Richtigkeit überzeugen. Ableiten ist in aller Regel deutlich einfacher als Integrieren. Nutze das aus um sicher zu sein!

   Finde nun in gleicher Weise die eindeutigen Lösungen zu den folgenden DGLs mit RBs und lasse dir ihre Graphen in **GeoGebra** aufzeichnen:

   (a) $f'(x) = 8x^3 + 1$ mit: $f(-1) = 0$.

   (b) $f'(x) = \sqrt{x}$ mit: $f(4) = \frac{13}{3}$.

   (c) $f'(x) = \frac{1}{x}$ mit: $f(-\frac{1}{e^2}) = 0$.

   Bemerkung: Die Funktion $\ln x$ mit Ableitung $\frac{1}{x}$ erlaubt nur positive Werte von x. Allerdings können wir sie mittels dem Betrag von x sinnvoll für $x < 0$ erweitern: $\ln|x|$. Dabei bleibt die Ableitung $\frac{1}{x}$ genau gleich, erhält also keine Betragsstriche.

   (d) $f'(x) = 4\cos(2x)$ mit: $f(\frac{\pi}{8}) = 2\sqrt{2}$.

   Achtung! Berücksichtige, dass bei der Ableitung von $\sin(2x)$ oder $\cos(2x)$ aufgrund der Kettenregel eine innere Ableitung als zusätzlicher Faktor entsteht.

   Nachtrag: Die Integration der Gleichung $f'(x) = r(x)$ entspricht dem Lösen einer **linearen, inhomogenen Differentialgleichung 1. Ordnung** mit Koeffizienten $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ (vgl. Skript *Allgemeines zu Differentialgleichungen*, Gleichung (1) auf Seite 2 oben):

   $$a_0 \cdot f(x) + a_1 \cdot f'(x) = r(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = ??$$

   Dabei ist die **Störfunktion** $r(x) \neq 0$ die Funktion, die es aufzuleiten gilt.

2. *Differentialgleichungen mit gegebenem Funktionsansatz zu Ende lösen*

   Bei den folgenden Aufgaben sollst du jeweils verifizieren, dass der gegebene **Funktionsansatz** die Differentialgleichung erfüllt.

   "Erfüllen" bedeutet, dass sich nach dem Einsetzen von $f(x)$, $f'(x)$, etc. in die DGL alle Glieder mit Variable x vollständig aus der Gleichung herausstreichen lassen. Dadurch ist gezeigt, dass die durch die DGL beschriebene Beziehung tatsächlich an jeder beliebigen Stelle x gültig ist. In aller Regel stimmt dies aber nur dann, wenn zwischen den anderen Parametern der DGL und des Funktionsansatzes bestimmte Beziehungen gelten.

   Erst durch zusätzliche **Randbedingung(en) (RBs)** werden schliesslich sämtliche im Funktionsansatz enthaltenen Parameter eindeutig festgelegt.

   Beispiel: $f'(x) = -\frac{1}{3} \cdot f(x)$ mit RB: $f(0) = 5$.

   Klassifizierung: Umstellung: $f'(x) + \frac{1}{3} \cdot f(x) = 0 \;\Rightarrow\;$ lineare, homogene DGL 1. Ordnung!

   Behauptung: Der Ansatz $f(x) = A \cdot e^{ax}$ erfüllt die DGL.

   Überprüfung: $f'(x) = A \cdot e^{ax} \cdot a$.

   Setze $f(x)$ und $f'(x)$ in die DGL ein: $f'(x) = -\frac{1}{3} \cdot f(x) \;\Rightarrow\; A \cdot e^{ax} \cdot a = -\frac{1}{3} \cdot A \cdot e^{ax}$.

   Exponentialterm e^{ax} und Vorfaktor A kürzen sich raus $\Rightarrow\; a = -\frac{1}{3}$. Sofern der Parameter a also dem Negativen des Faktors k in der ursprünglichen DGL entspricht, erfüllt unser Ansatz diese DGL. Die Variable x streicht sich raus. Das bedeutet, die DGL ist wirklich an jeder beliebigen Stelle x erfüllt.

   Allgemeine Lösung: Die allg. Lsg. der DGL lautet also $f(x) = A \cdot e^{-x/3}$. Sie enthält einen noch nicht bestimmten Parameter A, wie wir das von einer DGL 1. Ordnung erwarten.

   RB einsetzen: Die RB legt den Parameter A fest: $f(0) = A \cdot e^0 = A \overset{!}{=} 5$.

   Eindeutige Lösung: Somit lautet unsere eindeutige Lösung: $f(x) = 5\,e^{-x/3}$.

   Finde nun bei den folgenden DGLs jeweils aufgrund des gegebenen Funktionsansatzes und der Randbedingungen die **eindeutige Lösung**. **Klassifiziere** alle DGLs! Linear/nicht-linear? Homogen/inhomogen? Ordnung? (Vgl. DGL-Skript Seiten 1+2.)

   (a) $x^2 f''(x) - 2x f'(x) + 2f(x) = 6$ mit RBs $f(2) = 17$ und $f'(-1) = -1$.

   Beh.: Mit dem Ansatz $f(x) = ax^2 + bx + c$ (quadratische Fkt.) lässt sich diese DGL eindeutig lösen.

   (b) $f''(x) = -3f'(x) + 4f(x) + 8x^2$ mit RBs: $f(0) = 0$ und $f'(0) = 0$.

   Beh.: Mit $f(x) = -2x^2 - 3x - \frac{13}{4} + A\,e^{-4x} + B\,e^{x}$ lässt sich diese DGL eindeutig lösen.

   Die Aufgaben (c) und (d) sind für diejenigen gedacht, denen es gerade Spass macht und drum gerade noch mehr Aufgaben lösen möchten...

   (c) $f'(x) = -\sin x \cdot f(x)$ mit RB: $f'(\frac{\pi}{3}) = 1$.

   Beh.: Mit $f(x) = A\,e^{\cos x}$ lässt sich diese DGL eindeutig lösen.

   (d) $f'(x) - \frac{x^2}{f^2(x)} \cdot (x^2 + 2) = 0$ mit RB: $f(0) = -3$.

   Beh.: Mit $f(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{5}x^5 + 2x^3 + 3c}$ lässt sich diese DGL eindeutig lösen.

   Hinweise: $f^2(x) := \big(f(x)\big)^2$. Und fürs Ableiten: $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \;\Rightarrow\; [\sqrt[3]{x}]' = \frac{1}{3}\,x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

3. *Radioaktive Zerfälle und Zerfallsgesetz*

   Wir betrachten eine **radioaktive Quelle**, in der es zum Zeitpunkt $t = 0$ N_0 **Radionuklide** (= Atome mit instabilem Kern) einer bestimmten Sorte geben soll, z.B. C–14. Diese Radionuklide haben eine **Halbwertzeit** $T_{1/2}$ – im Falle von C–14 sind es 5730 Jahre – in der für jedes einzelne Radionuklid eine Wahrscheinlichkeit von $50\,\%$ besteht, dass der Kern radioaktiv zerfällt.

   Wie verändert sich die Anzahl **Radionuklide** in der Quelle? Wie lautet also die Funktion $N(t)$, die zu jedem Zeitpunkt t angibt, wie viele Radionuklide noch in der Quelle vorhanden sind?

   Die Antwort kennt ihr bereits aus der Kernphysik. Es muss sich das exponentiell abfallende **Zerfallsgesetz** ergeben.

   Vorüberlegungen: Zu irgendeinem Zeitpunkt t sind noch $N(t)$ Radionuklide vorhanden. Im darauf folgenden Zeitabschnitt Δt verändert sich die Anzahl noch vorhandener Radionuklide um ΔN. Dabei muss $\Delta N < 0$ sein, denn es handelt sich um eine Abnahme von N.

   Für jeden einzelnen der $N(t)$ radioaktiven Kerne besteht dieselbe Wahrscheinlichkeit innerhalb von Δt zu zerfallen, sodass die Gesamtzahl der tatsächlich innerhalb von Δt zerfallenden Kerne proportional zu $N(t)$ sein muss. Dieser Gedanke gilt auch – oder vielleicht insbesondere (!) – im Infinitesimalen. Im infinitesimalen Zeitschritt $\mathrm{d}t$ verändert sich die Anzahl noch vorhandener Radionuklide um $\mathrm{d}N$, wobei diese Veränderung proportional zu $N(t)$ sein muss. Somit erhalten wir eine infinitesimale Gleichung:

   $$\mathrm{d}N = -\lambda \cdot N(t) \cdot \mathrm{d}t$$

   Die sogenannte **Zerfallskonstante** λ muss als Mass für die **Zerfallswahrscheinlichkeit** des einzelnen Kerns interpretiert werden. Sie soll per Definition positiv sein: $\lambda > 0$. So verstehen wir auch das zusätzlich eingefügte Minuszeichen. Es sorgt dafür, dass $\mathrm{d}N$ negativ herauskommt (Abnahme!).

   Die Differentialgleichung: Teilen wir obige Gleichung durch $\mathrm{d}t$, so folgt:

   $$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda \cdot N(t) \qquad \text{resp.} \qquad N'(t) = -\lambda \cdot N(t)$$

   (a) Finde den allgemeinen Lösungsansatz $N(t) = \ldots$ für diese **Differentialgleichung**.

      Achtung: Es handelt sich um eine normale Differenzialgleichung 1. Ordnung. In die allgemeine Lösung muss folglich ein zusätzlicher, frei wählbarer Parameter eingebaut werden.

      Tipp: Einleitungsbeispiel in Aufgabe 2!

   (b) Bestimme den frei wählbaren Parameter so, dass die Anfangsbedingung $N(0) = N_0$ erfüllt ist und notiere somit die Abnahmefunktion $N(t)$ der Radionuklide in unserer Quelle (Zerfallsgesetz).

   (c) Zwischen der Zerfallskonstante λ und der Halbwertzeit $T_{1/2}$ muss es einen Zusammenhang geben, denn: Je grösser die Zerfallswahrscheinlichkeit ist, desto kleiner wird die Halbwertszeit sein müssen... Wie lautet der mathematisch exakte Zusammenhang zwischen λ und $T_{1/2}$?

   (d) In der höheren Physik verwenden wir für Exponentialfunktionen in aller Regel die Basis e (= Euler'sche Zahl ≈ 2.718). Für ein besseres Verständnis ist die Wahl einer anderen Basis aber immer mal wieder hilfreich. Damit sage ich implizit: Eine Exponentialfunktion lässt sich im Prinzip mit jeder beliebigen Basis $a > 0$ (mit $a \neq 1$) notieren.

      Formuliere das unter (c) erhaltene Zerfallsgesetz unter Verwendung der neuen Exponentialbasis $a = \frac{1}{2}$ und erläutere, weshalb der so entstehende Ausdruck für $N(t)$ etwas einfacher zu interpretieren ist.