Übungen zum EF Physik des 20. Jahrhunderts

Serie 11: Ein Mini-Einblick in die Welt der Differentialgleichungen – LÖSUNGEN

1. *Integrieren $\widehat{=}$ Lösen von linearen, inhomogenen Differentialgleichungen 1. Ordnung*

   (a) **Aufgabe:** $f'(x) = 8x^3 + 1$ mit RB: $f(-1) = 0$.

   Allgemeine Lösung: $f(x) = 2x^4 + x + C$.

   Erfüllung der RB: $f(-1) = 2 \cdot (-1)^4 - 1 + C = 2 - 1 + C = 1 + C \overset{!}{=} 0 \Rightarrow C = -1$.

   Eindeutige Lösung: $f(x) = 2x^4 + x - 1$.

   (b) **Aufgabe:** $f'(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ mit RB: $f(4) = \frac{13}{3}$.

   Allgemeine Lösung: $f(x) = \frac{2}{3}\, x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\, x\sqrt{x} + C$.

   Erfüllung der RB: $f(4) = \frac{2}{3} \cdot 4\sqrt{4} + C = \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 + C = \frac{16}{3} + C \overset{!}{=} \frac{13}{3} \Rightarrow C = -\frac{3}{3} = -1$.

   Eindeutige Lösung: $f(x) = \frac{2}{3}\, x\sqrt{x} - 1$.

   (c) **Aufgabe:** $f'(x) = \frac{1}{x}$ mit RB: $f(-\frac{1}{e^2}) = 0$.

   Allgemeine Lösung: $f(x) = \ln|x| + C$.

   Erfüllung der RB: $f(-\frac{1}{e^2}) = \ln\left(|-\frac{1}{e^2}|\right) + C = \ln\frac{1}{e^2} + C = \ln e^{-2} + C = -2 + C \overset{!}{=} 0 \Rightarrow C = 2$.

   Eindeutige Lösung: $f(x) = \ln|x| + 2$.

   (d) **Aufgabe:** $f'(x) = 4\cos(2x)$ mit RB: $f(\frac{\pi}{8}) = 2\sqrt{2}$.

   Allgemeine Lösung: $f(x) = 2\sin(2x) + C$.

   Erfüllung der RB: $f(\frac{\pi}{8}) = 2\sin(2 \cdot \frac{\pi}{8}) + C = 2\sin\frac{\pi}{4} + C = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + C = \sqrt{2} + C \overset{!}{=} 2\sqrt{2} \Rightarrow C = \sqrt{2}$.

   Eindeutige Lösung: $f(x) = 2\sin(2x) + \sqrt{2}$.

2. *Differentialgleichungen mit gegebenem Funktionsansatz zu Ende lösen*

   (a) Aufgabe: $x^2 f''(x) - 2xf'(x) + 2f(x) = 6$ mit RBs: $f(2) = 17$ und $f'(-1) = -1$.

   Ableitungen: $f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b$ und $f''(x) = 2a$.

   Einsetzen: $x^2 \cdot 2a - 2x \cdot (2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = 6 \Leftrightarrow 2ax^2 - 4ax^2 - 2bx + 2ax^2 + 2bx + 2c = 6$
   $\Leftrightarrow 2c = 6 \Leftrightarrow c = 3$.

   Allgemeine Lösung: $f(x) = ax^2 + bx + 3$.

   Erfüllung der RBs: $f(2) = 4a + 2b + 3 \overset{!}{=} 17$ und $f'(-1) = -2a + b \overset{!}{=} -1 \Rightarrow a = 2$ und $b = 3$.

   Eindeutige Lösung: $f(x) = 2x^2 + 3x + 3$.

(b) Aufgabe: $f''(x) = -3f'(x) + 4f(x) + 8x^2$ mit RBs: $f(0) = 0$ und $f'(0) = 0$.

Ableitungen: $f(x) = -2x^2 - 3x - \frac{13}{4} + A\,e^{-4x} + B\,e^{x} \Rightarrow f'(x) = -4x - 3 - 4A\,e^{-4x} + B\,e^{x}$
$\Rightarrow f''(x) = -4 + 16A\,e^{-4x} + B\,e^{x}$.

Einsetzen: $-4 + 16Ae^{-4x} + Be^{x} = -3(-4x - 3 - 4Ae^{-4x} + Be^{x}) + 4(-2x^2 - 3x - \frac{13}{4} + Ae^{-4x} + Be^{x}) + 8x^2$
$\Leftrightarrow -4 + 16Ae^{-4x} + Be^{x} = 12x + 9 + 12Ae^{-4x} - 3Be^{x} - 8x^2 - 12x - 13 + 4Ae^{-4x} + 4Be^{x} + 8x^2$
$\Leftrightarrow 0 = 0 \Rightarrow$ Gleichung ist für alle x erfüllt!

Erfüllung der RBs: $f(0) = -\frac{13}{4} + A + B \overset{!}{=} 0$ und $f'(0) = -3 - 4A + B \overset{!}{=} 0 \Rightarrow A = \frac{1}{20}$ und $B = \frac{16}{5}$.

Eindeutige Lösung: $f(x) = -2x^2 - 3x - \frac{13}{4} + \frac{1}{20}\,e^{-4x} + \frac{16}{5}\,e^{x}$.

(c) Aufgabe: $f'(x) = -\sin x \cdot f(x)$ mit RB: $f'(\frac{\pi}{3}) = 1$.

Ableitung: $f(x) = A\,e^{\cos x} \Rightarrow f'(x) = A\,e^{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\sin x \cdot A\,e^{\cos x}$.

Einsetzen: $-\sin x \cdot A\,e^{\cos x} = -\sin x \cdot A\,e^{\cos x}$ stimmt immer.

Ansatz $f(x) = A\,e^{\cos x}$ entspricht somit bereits der allgemeinen Lösung.

Erfüllung der RB: $f'(\frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{3} \cdot A\,e^{\cos\frac{\pi}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot A\,e^{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3e}}{2}\,A \overset{!}{=} 1 \Rightarrow A = -\frac{2}{\sqrt{3e}}$.

Eindeutige Lösung: $f(x) = -\frac{2}{\sqrt{3e}} \cdot e^{\cos x}$.

(d) Aufgabe: $f'(x) - \frac{x^2}{f^2(x)} \cdot (x^2 + 2) = 0$ mit RB: $f(0) = -3$.

Ableitungen: $f(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{5}x^5 + 2x^3 + 3c} = \left(\frac{3}{5}x^5 + 2x^3 + 3c\right)^{\frac{1}{3}}$
$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}x^5 + 2x^3 + 3c\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{5}x^5 + 2x^3 + 3c}^{\,2}} \cdot (3x^4 + 6x^2)$.

Einsetzen: $\frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{5}x^5 + 2x^3 + 3c}^{\,2}} \cdot (3x^4 + 6x^2) - \frac{x^2}{\sqrt[3]{\frac{3}{5}x^5 + 2x^3 + 3c}^{\,2}} \cdot (x^2 + 2) = 0$
$\Leftrightarrow \frac{3x^4 + 6x^2}{3} - x^2(x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ ist für alle x erfüllt.

Erfüllung der RB: $f(0) = \sqrt[3]{3c} \overset{!}{=} -3 \Leftrightarrow 3c = -27 \Leftrightarrow c = -9$.

Eindeutige Lösung: $f(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{5}x^5 + 2x^3 - 27}$.

3. *Radioaktive Zerfälle und Zerfallsgesetz*

(a) Als Ansatz für die Differentialgleichung $N'(t) = -\lambda \cdot N(t)$ muss wohl eine Exponentialfunktion gewählt werden, denn solche Funktionen bleiben beim Ableiten im Wesentlichen gleich.
In der Physik wählen wir in der Regel die Exponentialfunktion mit Basis e und setzen an:

$$N(t) = A \cdot e^{-\lambda t}$$

Der Faktor $-\lambda$ im Exponenten erzeugt ganz automatisch den Vorfaktor von $N(t)$ in der DGL.
Der Faktor A ist der frei wählbare Parameter, der in eine gewöhnliche, lineare und homogene DGL 1. Ordnung eingebaut werden muss, um alle möglichen Lösungen abzudecken. Wir sehen bei der Kontrolle sofort, dass dieses A für die Richtigkeit der DGL keine Rolle spielt:

$$N'(t) = A \cdot e^{-\lambda t} \cdot (-\lambda) = -\lambda \cdot A \cdot e^{-\lambda t} = -\lambda \cdot N(t) \quad \checkmark$$

(b) Die Anfangsbedingung lautet: $N(0) = N_0$. Daraus folgt sofort:

$$N(0) = A \cdot e^{-\lambda \cdot 0} = A \cdot 1 = A \overset{!}{=} N_0 \quad \Rightarrow \quad N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

(c) Lassen wir eine Halbwertzeit $T_{1/2}$ verstreichen, so muss sich die Anzahl noch vorhandener Kerne halbiert haben. Daraus folgt:

$$N(T_{1/2}) \overset{!}{=} \frac{N_0}{2} \quad \Rightarrow \quad N_0 \cdot e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{N_0}{2} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda T_{1/2} = \ln \frac{1}{2}$$

Mit $\ln \frac{1}{2} = \ln 2^{-1} = -\ln 2$ ergibt sich:

$$-\lambda T_{1/2} = \ln \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda T_{1/2} = -\ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

Tatsächlich ist die Zerfallskonstante λ umso kleiner, je grösser die Halbwertzeit $T_{1/2}$ ist.

(d) Mit der neuen Basis $a = \frac{1}{2}$ soll die Exponentialfunktion zu jedem Zeitpunkt t immer noch denselben Wert liefern wie mit der Basis e. Es muss also gelten:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \overset{!}{=} N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{kt}$$

Dass der Vorfaktor N_0 bei beiden Basen immer noch derselbe sein muss, ergibt sich sofort aus der Bedingung $N(0) = N_0$. Nach Division durch N_0 und Logarithmieren mit $\ln(\ldots)$ auf beiden Gleichungsseiten erhalten wir:

$$-\lambda t = \ln \left(\frac{1}{2}\right)^{kt} \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda t = kt \cdot \ln \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda = k \cdot \ln \frac{1}{2}$$

Dass sich die Variable t raus gekürzt hat, ist die Bestätigung, dass wir jede Exponentialfunktion in einer beliebigen, positiven und von 1 verschiedenen Basis a notieren können.
Verwenden wir nun noch, dass $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$ und dass $\ln \frac{1}{2} = -\ln 2$, so folgt:

$$-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} = -\ln 2 \cdot k \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{1}{T_{1/2}} \quad \Rightarrow \quad N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}}$$

In dieser Notationsform des Zerfallsgesetzes kommt sehr direkt zum Ausdruck, dass für jede Halbwertzeit $T_{1/2}$, die in der verstrichenen Zeit t enthalten ist, einmal der Faktor $\frac{1}{2}$ auf die noch vorhandene Teilchenmenge angewendet wird. Auf Stufe Gymnasium ist es aufgrund dieser "mathematischen Klarheit" absolut sinnvoll, das Gesetz in dieser Form zu verwenden.
Ab Stufe Hochschule wird fast ausschliesslich die Basis e für Exponentialfunktionen verwendet. Den Grund dafür kennen wir nun. Die Basis e ist beim Ableiten und somit im Umgang mit Differentialgleichungen einfach viel praktischer, man könnte sagen "natürlicher".

Abschliessende Anmerkung zur Differentialgleichung: Überall dort, wo die Veränderung einer Grösse proportional zur Grösse selber ist, ergeben sich exponentielle Entwicklungen! Das gilt nicht nur für Abnahmen, sondern auch für das Wachstum. Hat man z.B. einen Betrag auf einem Sparkonto mit fixem Zinssatz und hebt nie etwas ab, dann wächst dieser Betrag exponentiell, weil die Zunahme, also der Zins, proportional zum bereits vorhandenen Betrag ist. Analog können die Fallzahlen bei Epidemien eine Zeit lang exponentiell anwachsen, weil die Anzahl Neuansteckungen proportional zur Zahl der bereits infizierten Menschen ist.