

Übungen zum EF Physik des 20. Jahrhunderts

Serie 10: Welle-Teilchen-Dualismus

Übersicht der Impuls- und Energieformeln

	Teilchen ohne Masse	Teilchen mit Masse	
	$v = c$	nicht-relativistisch	relativistisch ($\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$)
Impuls	$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c}$	$p = mv$	$p = \gamma mv$
	Allgemein gültig (De Broglie):	$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$ mit Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{\lambda}$	
Energie	$E = pc = \frac{hc}{\lambda}$	$E = E_{\text{kin}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$	Gesamtenergie: $E = \gamma mc^2$ Ruheenergie: $E_0 = mc^2$ $\Rightarrow E_{\text{kin}} = E - E_0 = (\gamma - 1)mc^2$ und: $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$
	Allgemein gültig: $E = hf = \hbar\omega$ mit Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$		

1. Relativistische Zusammenhänge zwischen Impuls und Energie eines Teilchens

Im Dokument zu den relativistischen Ausdrücken für Impuls und Energie eines freien Teilchens wurden die folgenden Formeln ohne weitere Herleitung angegeben:

Relativistischer Impuls: $p = \gamma mv$ mit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$

Relativistische Gesamtenergie: $E = \gamma mc^2$

- (a) Was geschieht mit der Formel für den Impuls p im klassischen Grenzfall $v \rightarrow 0$?
- (b) Mache dieselbe Grenzfall-Betrachtung für die Gesamtenergie E . Was hat Einstein aus dieser Grenzwertbetrachtung gefolgert?
- (c) Berechne die Ruheenergien eines Elektrons und eines Protons in MeV.
- (d) Die kinetische Energie E_{kin} eines freien Teilchens ergibt sich aus der Differenz von Gesamtenergie E und Ruheenergie E_0 :

$$E_{\text{kin}} = E - E_0$$

Zeige, dass diese Differenz im Grenzfall $v \rightarrow 0$ in die klassische Formel $E_{\text{kin}} = \frac{mv^2}{2}$ übergeht.

Tipp: Für kleine $x \approx 0$ gilt die Näherungsformel:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{x}{2}$$

- (e) Eliminiere γ resp. v aus den beiden relativistischen Formeln für p und E , um die Gleichung

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

herzuleiten, die Energie und Impuls eines Teilchens miteinander in Verbindung bringt.

Tip: Quadriere zunächst die beiden Formeln für p und E !

- (f) Wenn $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ allgemeine Gültigkeit besitzt, wie sieht dann der Zusammenhang zwischen Energie und Impuls bei einem masselosen Teilchen aus, also z.B. bei einem Photon?
- (g) Wenn zudem gilt, dass $E_\gamma = hf$, wie berechnet sich dann der Impuls eines Photons γ aus dessen Wellenlänge λ ?
- (h) Wie lange müsste unser 0.5 mW He-Ne-Laser ($\lambda = 633 \text{ nm}$) betrieben werden, bis Photonen mit einem Gesamtimpuls vergleichbar demjenigen einer Stubenfliege ($m = 3 \text{ mg}$, $v = 0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$) ausgesendet wurden?

Hinweis: Versuche diese Aufgabe – vielleicht erst im zweiten Durchgang – rein formal zu lösen und so aufzuzeigen, dass die Wellenlänge unseres Lasers für die Antwort keine Rolle spielt. Hast du eine Begründung, weshalb dies so herauskommen muss?

2. Eine grundlegende Frage zur Wellennatur von Materie

Denke über das Doppelspalt-Experiment mit Elektronen nach. Weshalb widerspricht, allgemein ausgedrückt, die Wellennatur der Materie so sehr der Intuition?

3. Erste Berechnungen zu Materiewellen

Grundsätzlich gilt: *Möchten wir das wellenartige Verhalten eines Objektes beobachten, dann muss seine Wellenlänge etwa mit den "relevanten Abmessungen" der Messapparatur übereinstimmen.*

- (a) Welche Wellenlänge hätte einerseits ein Elektron ($m_e = 9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$) und andererseits ein Flugzeug ($m_F = 25 \text{ t}$), wenn beide sich mit $900 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (nicht-relativistisch!) bewegen? Welches der beiden Objekte kann eher dazu gebracht werden in einem Versuch seine Wellennatur zu offenbaren? Weshalb?
- (b) Um die Wellennatur geladener Teilchen praktisch zu nutzen, wird zu Beginn oft eine Beschleunigungsspannung U verwendet. Leite eine Formel für U her, die einem Teilchen der Masse m und der Ladung q die Wellenlänge λ verleiht. Die Beschleunigungsspannung U soll nicht ausreichen, um das Teilchen auf relativistische Geschwindigkeiten zu beschleunigen.
Hinweis: Die Beschleunigungsspannung überträgt kinetische Energie ans Teilchen. Es gilt: $E_{\text{kin}} = U \cdot q$. Die in der Formel für die kinetische Energie enthaltene Geschwindigkeit ist via De-Broglie-Formel mit der Wellenlänge verknüpft.
- (c) Wie langsam müssten sich die e^- in einem Elektronenstrahl bewegen, damit ihre Wellenlänge mindestens $1 \mu\text{m}$ beträgt und wie gross wäre die Beschleunigungsspannung dazu maximal?

- (d) Elektronen, die wir mit Spannungen beschleunigen, sind aufgrund ihrer geringen Masse in der Regel wesentlich schneller unterwegs.

In alten Röhrenfernsehern wurden Elektronen beispielsweise mit 25 000 V beschleunigt. Sollte man nach einer derartigen Beschleunigung nun relativistisch rechnen? Und wie gross wäre die Wellenlänge eines solchen Elektrons? Fallen dir Objekte ein, an denen die Wellennatur solcher Elektronen sichtbar würde?

Hinweise: Ab einem Lorentzfaktor von $\gamma \approx 1.01$ sollte bestimmt relativistisch gerechnet werden. Den Lorentzfaktor erhalten wir sehr einfach aus dem Verhältnis zwischen Gesamtenergie E und Ruheenergie $E_0 = mc^2$:

$$E = \gamma mc^2 = \gamma E_0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = \frac{E}{E_0}$$

Erhält das Elektron durch die Spannung U die kinetische Energie $E_{\text{kin}} = U \cdot e$, so beträgt seine Gesamtenergie danach:

$$E = E_{\text{kin}} + E_0 = Ue + E_0$$

Zur Erinnerung: Die Ruheenergie des Elektrons beträgt gemäss dem Resultat aus Aufgabe 1.(c) etwa 0.511 MeV. Es ist daher äusserst praktisch auch die kinetische Energie in MeV anzugeben, was extrem leicht fällt. . .

Aus der Gesamtenergie oder dem Lorentzfaktor den Impuls und daraus dann die Wellenlänge zu berechnen, sollte nicht mehr schwierig sein.

- (e) Ein Elektronenstrahl, der durch eine Spannung von 1.0 kV beschleunigt wird, ist Teil eines Bragg'schen Beugungsexperimentes.
- Bei welchen Winkeln relativ zu den Ebenen der Atome treten Beugungsmaxima auf, wenn der Abstand zwischen den Atomlagen des Kristalls 0.10 nm beträgt?
 - Wenn ein Röntgenstrahl bei denselben Winkeln Beugungsmaxima wie der Elektronenstrahl aufweist, welche Energie haben dann die Röntgenphotonen?



Ein reales Transmissions-Elektronenmikroskop (TEM).

4. Das TEM – eine nützliche Anwendung von Elektronenwellen

Das **Transmissions-Elektronenmikroskop (TEM)** ist sowohl in den biologischen Wissenschaften als auch in anderen Disziplinen eines der wichtigsten Hilfsmittel der Forschung. Das TEM ersetzt den beleuchtenden Lichtstrahl eines optischen Mikroskops durch einen Elektronenstrahl, der durch eine Beschleunigungsspannung erzeugt wird. Wie rechts schematisch dargestellt, nehmen magnetische “Linsen” den Platz der Glaslinsen ein. Nachdem er die Probe getroffen und eine Reihe von “Linsen” durchquert hat, erzeugt der Elektronenstrahl ein Bild auf einem Schirm. Wie uns die Optik lehrt, wird die Auflösung eines Mikroskops durch die Beugung begrenzt: Details, die kleiner als die benutzte Wellenlänge sind, bleiben verwaschen. Die Wellenlängen von Licht werden in Hunderten von Nanometern gemessen. Die Elektronen des TEM weisen viel kürzere Wellenlängen auf, werden weniger gebeugt und enthüllen daher viel mehr Details.

Wie ihr Name schon sagt, beruht auch die **niederenergetische Elektronenbeugung (LEED, low-energy electron diffraction)**, eine weitere Anwendung von beschleunigenden Spannungen, darauf, dass Elektronen wie Wellen gebeugt werden. Ähnlich wie im Experiment von Davisson und Germer wird bei der LEED ein Elektronenstrahl von einem Kristall reflektiert. Da nur “niedrige” Beschleunigungsspannungen verwendet werden, dringen die Elektronen eines LEEDs nicht tief ein. Die so entstehenden Beugungsspitzen enthüllen die geometrischen Strukturen der Atome auf der Oberfläche.

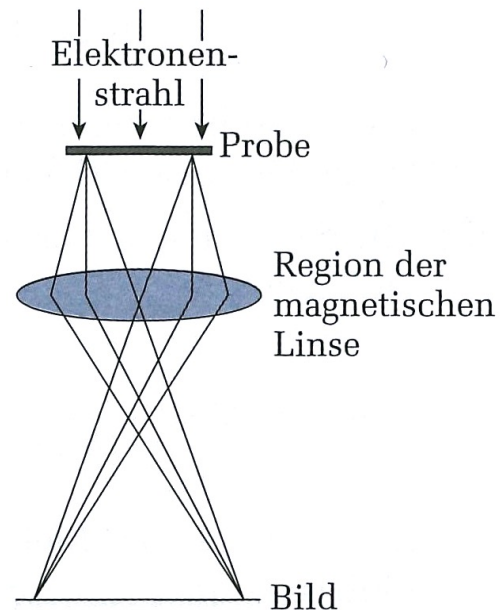


Abbildung 4.8: In einem Elektronenmikroskop ersetzen Elektronen die Lichtstrahlen, während Magnetfelder die Rolle der Glaslinsen übernehmen

- Um mit einem Verfahren wie LEED ein deutliches Beugungsmuster zu erzeugen, muss der einfallende Strahl eine Wellenlänge besitzen, die mit dem Abstand zwischen den “Spalten” – den Atomen, die für die Streuung des Strahls verantwortlich sind – vergleichbar ist. Ein typischer atomarer Abstand in einem Kristall beträgt 0.2 nm . Welche Beschleunigungsspannung ist näherungsweise geeignet?
- Die Beschleunigungsspannung eines bestimmten TEM beträgt 50 kV . Wenn dies der einzige Faktor wäre, der die Auflösung beeinflusst, welche Ausmaße hätten dann die kleinsten noch sichtbaren Details?

Hinweis: Vergleiche Aufgabe 3.(c)!