Übungen zum EF Physik des 20. Jahrhunderts

Serie 10: Welle-Teilchen-Dualismus – LÖSUNGEN

1. *Relativistische Zusammenhänge zwischen Impuls und Energie eines Teilchens*

   (a) Da $\gamma \to 1$ für $v \to 0$ geht die Impulsformel einfach in die klassische Formel für den Impuls über:

   $$v \text{ klein} \quad \Rightarrow \quad \gamma \approx 1 \quad \Rightarrow \quad p = \gamma m v \approx m v$$

   (b) Ebenso notieren wir für die Gesamtenergie:

   $$v \text{ klein} \quad \Rightarrow \quad \gamma \approx 1 \quad \Rightarrow \quad E = \gamma m c^2 \approx m c^2 = \text{konstant}$$

   D.h., die Gesamtenergie verschwindet nicht, sondern es gibt einen konstanten Energiewert mc^2, der auch bei $v = 0$ immer noch vorhanden ist. Daraus folgerte Einstein, dass jedem Teilchen oder Objekt eine *Ruheenergie* $E_0 = mc^2$ innewohnt, die mit der Masse des Objektes zu tun hat.

   (c) Wir erhalten für das Elektron und das Proton:

   $$E_{0,e} = m_e c^2 = 8.187 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{J} = 0.511\,\mathrm{MeV}$$
   $$E_{0,e} = m_e c^2 = 8.187 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{J} = 938.3\,\mathrm{MeV}$$

   N.B.: Die Massenwerte m_e und m_p in kg, die Lichtgeschwindigkeit$c$ in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und die Elementarladung e in C sind im Taschenrechner vorhanden. Damit werden die Rechnungen relativ einfach. Für das Megaelektronvolt gilt:

   $$\mathrm{MeV} = \underbrace{1\,000\,000}_{=\mathrm{M}} \cdot \underbrace{1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}}_{=e} \cdot \mathrm{V} = 1.602 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{J}$$

   (d) Wir benutzen die angegebene Näherungsformel für den Lorentzfaktor:

   $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 \qquad \text{für} \quad v \ll c \quad \text{resp.} \quad \frac{v}{c} \approx 0$$

   Damit folgt für die kinetische Energie bei geringer Geschwindigkeit:

   $$E_{\mathrm{kin}} = (\gamma - 1)\, mc^2 \approx \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 - 1\right) mc^2 = \frac{v^2}{2c^2} \cdot mc^2 = \frac{mv^2}{2}$$

   Das entspricht der klassischen Formel für die kinetische Energie.

   (e) Wir quadrieren zunächst die beiden relativistischen Formeln für p und E und setzen dann für γ^2 den von v abhängigen Ausdruck ein, sodass nur noch v und kein γ mehr vorhanden ist:

   $$p^2 = (\gamma m v)^2 = \gamma^2 m^2 v^2 = \frac{m^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m^2 v^2}{\frac{c^2 - v^2}{c^2}} = \frac{m^2 v^2 c^2}{c^2 - v^2}$$
   $$E^2 = \left(\gamma m c^2\right)^2 = \gamma^2 m^2 c^4 = \frac{m^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m^2 c^4}{\frac{c^2 - v^2}{c^2}} = \frac{m^2 c^6}{c^2 - v^2}$$

   Nun können wir direkt $E^2 - p^2c^2$ ausrechnen. Ergibt sich dabei m^2c^4, so haben wir die Gleichung $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ bestätigt resp. hergeleitet:

   $$E^2 - p^2 c^2 = \frac{m^2 c^6}{c^2 - v^2} - \frac{m^2 v^2 c^2}{c^2 - v^2} \cdot c^2 = \frac{m^2 c^6 - m^2 v^2 c^4}{c^2 - v^2} = \frac{m^2 c^4 \left(c^2 - v^2\right)}{c^2 - v^2} = m^2 c^4$$

   (f) Ein Photon ist masselos, $m = 0$, woraus folgt:

   $$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \qquad \xrightarrow{m=0} \qquad E^2 = p^2 c^2 \qquad \Rightarrow \qquad E = pc$$

(g) Aus $E = pc$ und $E = hf$ folgern wir mittels $c = \lambda f$:

$$pc = hf \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{hf}{c} = \frac{hf}{\lambda f} = \frac{h}{\lambda}$$

(h) Ganz explizit und wenig formal können wir folgendermassen Schritt für Schritt rechnen:

i. Impuls eines einzelnen Photons des Lasers:

$$p_\gamma = \frac{h}{\lambda} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}}{632.8 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}} = 1.047 \cdot 10^{-27}\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}$$

Dabei haben wir benutzt, dass $\mathrm{J} = \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}}$ und somit $\frac{\mathrm{J\,s}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}$. Das ist die richtige SI-Einheitenkombination für einen Impuls (klassisch: $p = mv$).

ii. Für die Energie des einzelnen Photons erhalten wir:

$$E_\gamma = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240\,\mathrm{eV\,nm}}{632.8\,\mathrm{nm}} = 1.960\,\mathrm{eV} = 3.139 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$$

iii. Mit der Leistung $P = 0.5\,\mathrm{mW}$ des Lasers können wir berechnen, wie viele Photonen pro Sekunde ausgesendet werden:

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{N \cdot E_\gamma}{\Delta t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{N}{\Delta t} = \frac{P}{E_\gamma} = \frac{0.5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{W}}{3.139 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}} = 1.593 \cdot 10^{15}\,\frac{\mathrm{Photonen}}{\mathrm{s}}$$

Dabei haben wir verwendet, dass sich eine Strahlungsenergiemenge ΔE jeweils aus den Energien E_γ einer bestimmten Photonenanzahl N zusammensetzt: $\Delta E = N\,E_\gamma$.

iv. Folglich beträgt der pro Zeitspanne ausgesendete Gesamtimpuls:

$$\frac{p}{\Delta t} = \frac{N}{\Delta t} \cdot p_\gamma = 10^{15}\,\frac{\mathrm{Photonen}}{\mathrm{s}} \cdot 1.047 \cdot 10^{-27}\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}} = 1.668 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s^2}}$$

v. Der Impuls der Stubenfliebe beträgt:

$$p_\mathrm{F} = mv = 3 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg} \cdot 0.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1.5 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}$$

vi. Somit folgt für die Zeitspanne, während der der Laser einen Gesamtphotonenimpuls aussendet, der dem Impuls der Studenfliege entspricht:

$$\Delta t = \frac{p_\mathrm{F}}{\frac{p}{\Delta t}} = \frac{1.5 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}}{1.668 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s^2}}} = 900\,000\,\mathrm{s} = 250\,\mathrm{h} \approx 10\,\mathrm{d}$$

Die von unseren Lichtquellen ausgesendeten Impulse sind demnach äusserst gering. Das entspricht der Alltagserfahrung, denn natürlich erfährt die Lichtquelle bei der Lichtausseindung auch einen Rückstoss, wenn das Licht einen Impuls besitzt. Davon haben wir allerdings beim Halten einer Taschenlampe noch nie etwas gespürt.

Wir können nun die Rechnung formal nochmals rückwärts zusammensetzen:

$$\Delta t = \frac{p_\mathrm{F}}{\frac{p}{\Delta t}} = \frac{mv}{\frac{N}{\Delta t} \cdot p_\gamma} = \frac{mv}{\frac{P}{E_\gamma} \cdot p_\gamma} = \frac{mv \cdot E_\gamma}{P \cdot p_\gamma} = \frac{mv \cdot \frac{hc}{\lambda}}{P \cdot \frac{h}{\lambda}} = \frac{mvc}{P}$$

Aufgrund der Leistung P des Lasers werden pro Zeitspanne Δt umso mehr Photonen ausgesendet, je weniger Energie E_γ das einzelne Photon besitzt. Auf der anderen Seite werden umso mehr Photonen benötigt, je weniger Impuls p_γ das einzelne Photon trägt. Da nun sowohl die Photonenenergie E_γ, als auch der Photonenimpuls p_γ umgekehrt proportional zur Wellenlänge λ sind, $E_\gamma = \frac{hc}{\lambda}$ und $p_\gamma = \frac{h}{\lambda}$, kürzt sich der Einfluss der Wellenlänge raus.

2. *Eine grundlegende Frage zur Wellennatur von Materie*

   Wenn wir von einem Elektron sprechen, so haben wir sofort das Bild eines Teilchens – eine Art winziges Kügelchen – im Kopf. Beim passieren des Doppelspaltes führt diese Vorstellung dazu, dass das Elektron einen der beiden Spalte durchquert. Damit ist aber nicht zu erklären, weshalb hinter dem Doppelspalt auf dem Schirm, wo die Elektronen auftreffen, ein Interferenzmuster entsteht. Woher soll das Elektron "wissen", dass da nebenan noch ein zweiter Spalt existiert, wenn es gerade den anderen Spalt passiert? Weshalb sind dann hinter dem Spalt bestimmte Bewegungsrichtungen verboten?

   Die Auflösung dieses Missverständnisses besteht darin, dass das Elektron eben gar nicht als Teilchen den Doppelspalt passiert, sondern eben als Materie- oder Wahrscheinlichkeitswelle. Der Wellenformalismus besagt dann, dass die Welle gleichzeitig durch beide Spalten hindurchgeht und dahinter eine Interferenz der beiden Kugelwellen entsteht, die von den beiden Spalten ausgeht. Erst wenn das Elektron auf vom Schirm detektiert wird, muss sich die Natur entscheiden, wo das Elektron gemäss der durch die Welle vorgegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung nun genau ankommt.

3. *Erste Berechnungen zu Materiewellen*

   (a) Für die beiden Wellenlängen berechnen wir bei $900\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, einer klar nicht-relativistischen Geschwindigkeit:

   $$\text{Elektron:}\qquad \lambda_e = \frac{h}{p_e} = \frac{h}{m_e \cdot v} = \frac{6.626\cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}}{9.109\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}\cdot 900\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 8.1\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m} = 810\,\mathrm{nm}$$

   $$\text{Flugzeug:}\qquad \lambda_\mathrm{F} = \frac{h}{p_\mathrm{F}} = \frac{h}{m_\mathrm{F}\cdot v} = \frac{6.626\cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}}{25\,000\,\mathrm{kg}\cdot 900\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 2.9\cdot 10^{-41}\,\mathrm{m}$$

   Das Flugzeug hat eine derart geringe Wellenlänge, dass wir seine Wellennatur nie beobachten werden. Dazu müsste es ja mit einer Struktur interagieren, die in etwa ebenfalls diese Grössenordnung besitzt – zum Vergleich: ein Atomkern hat eine Ausdehnung in der GRössenordnung von $10^{-15}\,\mathrm{m}$.

   Anders beim Elektron. Diese langsamen Elektronen könnten durchaus mit kleinen Objekten im Bereich weniger Mikrometer so interagieren, dass die Wellennatur sichtber würde.

   (b) Wie schon gesagt, beträgt die dem geladenen Teilchen mitgegebene kinetische Energie $E_\mathrm{kin} = U\cdot q$. Diese kinetische Energie ist direkt mit dem Impuls p verknüpft. Klassisch gilt:

   $$E_\mathrm{kin} = \frac{mv^2}{2} \quad\Leftrightarrow\quad v = \sqrt{\frac{2E_\mathrm{kin}}{m}} \quad\Rightarrow\quad p = mv = m\sqrt{\frac{2E_\mathrm{kin}}{m}} = \sqrt{2E_\mathrm{kin}m}$$

   Damit folgt für die De-Broglie-Wellenlänge:

   $$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2E_\mathrm{kin}m}} = \frac{h}{\sqrt{2Uqm}}$$

   Bleibt noch übrig diese Gleichung nach U aufzulösen:

   $$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2Uqm}} \quad\Leftrightarrow\quad \lambda^2 = \frac{h^2}{2Uqm} \quad\Leftrightarrow\quad \lambda^2\cdot 2Uqm = h^2 \quad\Leftrightarrow\quad U = \frac{h^2}{2qm\lambda^2}$$

(c) Aus der Wellenlänge folgt sofort für die Geschwindigkeit:

$$p = m_e v = \frac{h}{\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{h}{m_e \lambda} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}}{9.109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}} = 730\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Das ist eine für freie Elektronen wirklich extrem langsame Geschwindigkeit, denn Elektronen lassen sich eigentlich aufgrund ihrer sehr geringen Masse sehr leicht auf richtig grosse Geschwindigkeiten bringen.

Zur Bestimmung der maximalen Beschleunigungsspannung verwenden wir die unter (b) herausgefundene Gleichung:

$$U_{\max} = \frac{h^2}{2qm\lambda^2} = \frac{h^2}{2em_e\lambda_{\min}^2} = \frac{\left(6.626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}\right)^2}{2 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 9.109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot \left(10^{-6}\,\mathrm{m}\right)^2} = 1.5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{V}$$

Schon bei sehr niedriger Beschleunigungsspannung wird die Wellenlänge der Elektronen sehr klein, sodass sie sich in unseren makroskopischen Versuchen eben immer teilchenartig verhalten.

(d) Bei $25\,000\,\mathrm{V}$ Beschleunigungsspannung berechnen wir für die Elektronen eine kinetische Energie von:

$$E_{\text{kin}} = Ue = 25\,000\,\mathrm{V} \cdot e = 25\,000\,\mathrm{eV} = 25\,\mathrm{keV} = 0.025\,\mathrm{MeV}$$

Aus Aufgabe 1.(c) kennen wir bereits die Ruheenergie des Elektrons: $E_0 = 0.511\,\mathrm{MeV}$. Damit erhalten wir für die Gesamtenergie des beschleunigten Elektrons:

$$E = E_0 + E_{\text{kin}} = 0.511\,\mathrm{MeV} + 0.025\,\mathrm{MeV} = 0.536\,\mathrm{MeV}$$

Für den Lorentzfaktor ergibt sich somit:

$$E = \gamma mc^2 = \gamma E_0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = \frac{E}{E_0} = \frac{0.536\,\mathrm{MeV}}{0.511\,\mathrm{MeV}} = 1.049 > 1.01$$

Wir sollten also relativistisch weiterrechnen!

Für den Impuls erhalten wir:

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 = p^2c^2 + E_0^2 \quad \Leftrightarrow \quad p^2c^2 = E^2 - E_0^2 \quad \Leftrightarrow \quad p^2 = \frac{E^2 - E_0^2}{c^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad p = \sqrt{\frac{E^2 - E_0^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{(0.536\,\mathrm{MeV})^2 - (0.511\,\mathrm{MeV})^2}{c^2}} = 0.1618\,\frac{\mathrm{MeV}}{c}$$

Tatsächlich werden in der Teilchenphysik die Teilchenimpulse in der Regel genau so, also in der Einheit $\frac{\mathrm{MeV}}{c}$ angegeben. Das ist fürs Rechnen in aller Regel viel praktischer als die SI-Einheitenkombination $\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}$, weil sich so greifbarere Zahlen ergeben.

Ebenso werden Massen z.B. in $\frac{\mathrm{MeV}}{c^2}$ angegeben. So beträgt die Masse eines Elektrons $0.511\,\frac{MeV}{c^2}$. Damit besitzen Ruheenergie und Masse dieselbe Masszahl, was eben wieder sehr praktisch ist.

Aus diesem Impuls lässt sich nun die Wellenlänge der Elektronen bestimmen:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{0.1618\,\frac{\mathrm{MeV}}{c}} \cdot \frac{c}{c} = \frac{hc}{0.1618\,\mathrm{MeV}} = \frac{1240\,\mathrm{eV\,nm}}{161\,800\,\mathrm{eV}} = 0.0077\,\mathrm{nm} = 7.7\,\mathrm{pm}$$

(e) Bei $1.0\,\mathrm{kV}$ Beschleunigungsspannung haben wir es noch mit einigermassen nicht-relativistischen Elektronen zu tun, wie wir rasch einsehen:

$$
\begin{aligned}
E_{\text{kin}} &= Ue = 1.0\,\mathrm{kV}\cdot 1.602\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} = 1.0\,\mathrm{keV} = 0.001\,\mathrm{MeV}\\
\Rightarrow\quad E &= E_{\text{kin}} + E_0 = 0.001\,\mathrm{MeV} + 0.511\,\mathrm{MeV} = 0.512\,\mathrm{MeV}\\
\Rightarrow\quad \gamma &= \frac{E}{E_0} = \frac{0.512\,\mathrm{MeV}}{0.511\,\mathrm{MeV}} = 1.002 < 1.01
\end{aligned}
$$

Für die Wellenlänge erhalten wir somit gemäss den Ausführungen in Aufgabe 3.(b):

$$
\lambda = \frac{h}{\sqrt{2Uem}} = \frac{6.626\cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}}{\sqrt{2\cdot 1000\,\mathrm{V}\cdot 1.602\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}\cdot 9.109\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}}} = 3.88\cdot 10^{-11}\,\mathrm{m} = 0.0388\,\mathrm{nm}
$$

Nun können wir uns an die Bearbeitung der Fragestellungen machen.

i. Wir verwenden die Bragg'sche Gesetz und lösen es nach $\sin\theta$ resp. θ auf:

$$
\begin{aligned}
&2d\sin\theta = m\lambda \qquad \text{mit}\quad m = 1, 2, 3, \ldots\\
\Leftrightarrow\quad &\sin\theta = \frac{m\lambda}{2d} \quad\Leftrightarrow\quad \theta = \arcsin\left(\frac{m\lambda}{2d}\right)
\end{aligned}
$$

Nun ist

$$
\frac{\lambda}{2d} = \frac{0.0388\,\mathrm{nm}}{2\cdot 0.10\,\mathrm{nm}} = 0.194 \quad .
$$

Das ist grösser als $\frac{1}{6} = 0.1\overline{6}$, aber kleiner als $\frac{1}{5} = 0.2$. Da die Sinusfunktion nicht grösser als 1 werden kann, gibt es bei unseren Daten somit nur 5 Winkel, die sich für $m = 1, \ldots, 5$ aus obiger Auflösung berechnen lassen:

$$
\theta_1 = 11.2^\circ \qquad \theta_2 = 22.8^\circ \qquad \theta_3 = 35.6^\circ \qquad \theta_4 = 50.9^\circ \qquad \theta_5 = 75.9^\circ
$$

ii. Auch für den Röntgenstrahl gilt das Bragg-Gesetz. Somit muss die Lichtwellenlänge der Elektronenwellenlänge entsprechen, wenn sich dieselben Winkel ergeben sollen.
Aus der Wellenlänge lässt sich bei Photonen aber ganz leicht auf die Teilchenenergie schliessen, wie wir das schon oft gesehen haben:

$$
E_\gamma = pc = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240\,\mathrm{eV\,nm}}{0.0388\,\mathrm{nm}} = 31\,960\,\mathrm{eV} = 32\,\mathrm{keV}
$$

In diesem Fall tragen also Photonen mit derselben Wellenlänge 32-mal soviel kinetische Energie, wie Elektronen durch die Beschleunigungsspannung abbekommen.

4. *Das TEM – eine nützliche Anwendung von Elektronenwellen*

(a) Die Wellenlänge der Strahlung muss in der Grössenordnung der Atomabstände sein, idealerweise ein bisschen darunter, aber wir wollen hier mit dem Atomabstand als Wellenlänge rechnen. Dann dient uns die in Aufgabe 3.(b) hergeleitete Formel, um direkt die Beschleunigungsspannung zu bestimmen:

$$U = \frac{h^2}{2qm\lambda^2} = \frac{h^2}{2em_e\lambda^2} = \frac{(6.626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s})^2}{2 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 9.109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot (0.2 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m})^2} = 37.6\,\mathrm{V}$$

Es muss also mit einer doch recht geringen Spannung beschleunigt werden – sogar lieber noch ein wenig geringer als die eben berechneten $38\,\mathrm{V}$, allerdings auch nicht allzu viel weniger, denn sonst würde kein gutes Beugungsmuster mehr sichtbar werden, weil die Wellenlänge sonst zu gross würde, um noch mehrere Beugungsmaxima und -minima zu erzeugen.

Da wir im Laufe der Übungsserie bereits Erfahrung mit Elektronenwellenlängen gesammelt haben, wissen wir auch, dass $38\,\mathrm{V}$ definitiv keine relativistischen Elektronen erzeugen. ($1000\,\mathrm{V}$ Beschleunigungsspannung in Aufgabe 3.(d) ergaben auch gerade noch keine relativistisch zu behandelnden Elektronen.)

(b) Bei $50\,\mathrm{kV}$ werden wir es hingegen mit relativistischen Elektronen zu tun haben – in Aufgabe 3.(c) haben wir das bei $25\,\mathrm{kV}$ Beschleunigungsspannung ja bereits gesehen. Folglich müssen wir genau gleich wie in Aufgabe 3.(c) vorgehen, um die Wellenlänge zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
& E_{\mathrm{kin}} = Ue = 50\,\mathrm{kV} \cdot e = 50\,\mathrm{keV} = 0.050\,\mathrm{MeV} \\
\Rightarrow\quad & E = E_0 + E_{\mathrm{kin}} = 0.511\,\mathrm{MeV} + 0.050\,\mathrm{MeV} = 0.561\,\mathrm{MeV} \\
\Rightarrow\quad & p = \sqrt{\frac{E^2 - E_0^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{(0.561\,\mathrm{MeV})^2 - (0.511\,\mathrm{MeV})^2}{c^2}} = 0.2315\,\frac{\mathrm{MeV}}{c} \\
\Rightarrow\quad & \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{0.2315\,\frac{\mathrm{MeV}}{c}} \cdot \frac{c}{c} = \frac{hc}{0.2315\,\mathrm{MeV}} = \frac{1240\,\mathrm{eV\,nm}}{231\,500\,\mathrm{eV}} = 0.0054\,\mathrm{nm} = 5.4\,\mathrm{pm}
\end{aligned}$$

Somit wären theoretisch Objekte von etwa $5.4\,\mathrm{pm}$ gerade noch etwa auflösbar. Solche schnellen Elektronen, deren Wellennatur viel schwächer ist als bei LEEDs, können also prinzipiell Details von nur $0.01\,\mathrm{nm}$ auflösen. Doch wie sich herausstellt, verringern Aberrationen in den magnetischen Linsen sogar bei den besten TEMs, die etwa die zehnfache Beschleunigungsspannung aufweisen, die Auflösung auf bestenfalls $0.1\,\mathrm{nm}$. Dies ist aber immer noch weit besser als die Auflösungsgrenze bei Lichtmikroskopen, die ungefähr bei $100\,\mathrm{nm}$ liegt.