Ergänzungen zur Quantenphysik

Komplexe Zahlen – eine Kürzesteinführung

1 Komplexe Zahlen als Menge geordneter Zahlenpaare

Jede **komplexe Zahl** $z \in \mathbb{C}$ entspricht dem geordneten Paar (x, y) zweier reeller Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$. *Geordnet* bedeutet, $z = (2, 3)$ ist etwas anderes als $z = (3, 2)$. Da die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ eine eindimensionale Zahlenmenge sind – alle reellen Zahlen bilden zusammen einen Zahlenstrahl von $-\infty$ bis $+\infty$ – sind die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ nun eben eine zweidimensionale Zahlenmenge, weil sich jede komplexe Zahl aus zwei reellen Zahlen zusammensetzt: $\mathbb{C} = \big\{(x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\big\}$. Kurz: $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

In $z = (x, y)$ wird die erste reelle Zahl x als **Realteil** von z und die zweite reelle Zahl y als **Imaginärteil** von z bezeichnet. Wir schreiben:

$$x = \mathrm{Re}\, z \qquad \text{und} \qquad y = \mathrm{Im}\, z \tag{1}$$

2 Die Summenschreibweise $z = x + y\mathrm{i}$

Die **Paarschreibweise** $z = (x, y)$ ist etwas umständlich, weil damit nicht so "straight forward" gerechnet werden kann. Die sogenannte **Summenschreibweise** ist da viel praktischer:

$$\textbf{Summenschreibweise:} \qquad z = x + y \cdot \mathrm{i} \tag{2}$$

Dabei lernen wir die **imaginäre Einheit** i kennen. Offenbar wird der Imaginärteil y mit dieser imaginären Einheit i multipliziert. Sofort ergibt sich ein einheitlicheres Gesamtbild, wenn wir verstehen, dass auch der Realteil x mit der **reellen Einheit** multipliziert wird, nur schreiben wir diese in aller Regel nicht auf. Es handelt sich dabei nämlich einfach um die reelle Zahl 1. Vollständig notiert würde (2) also lauten:

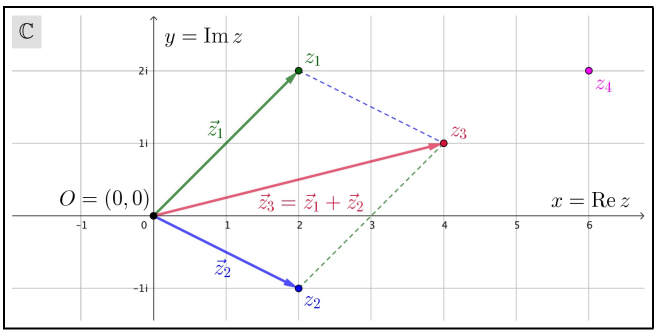
$$z = x \cdot 1 + y \cdot \mathrm{i} \qquad \text{"}x\text{-mal die reelle Einheit } 1 \text{ plus } y\text{-mal die imaginäre Einheit i."} \tag{3}$$

Mit der Summenschreibweise lässt sich nun genau so rechnen, wie wir uns das von Binomen gewohnt sind. Dabei besagen die Rechenregeln der komplexen Zahlen, dass das Quadrat der imaginären Einheit i den Wert -1 hat: $\mathrm{i}^2 = -1$.[1] Betrachten wir konkret zwei grundlegende Operationen, nämlich die Addition und die Multiplikation zweier komplexen Zahlen $z_1 = 2 + 2\mathrm{i}$ und $z_2 = 2 - \mathrm{i}$:

$$z_3 = z_1 + z_2 = 2 + 2\mathrm{i} + 2 - \mathrm{i} = 4 + \mathrm{i}$$
$$z_4 = z_1 \cdot z_2 = (2 + 2\mathrm{i})(2 - \mathrm{i}) = 4 - 2\mathrm{i} + 4\mathrm{i} - 2\mathrm{i}^2 = 4 + 2\mathrm{i} + 2 = 6 + 2\mathrm{i}$$

3 Die Gauss'sche Zahlenebene

Jede komplexe Zahl $z = (x, y)$ kann als Punkt in einem x-y-Koordinatensystem interpretiert werden, das wir als **Gauss'sche Zahlenebene** oder einfach als **komplexe (Zahlen-)Ebene** bezeichnen. Hier die Positionen der vier Zahlen von oben in der komplexen Ebene:



[1] Wegen $\mathrm{i}^2 = -1$ wird – vor allem in physikalischen Texten – die imaginäre Einheit i oft als Wurzel von -1 bezeichnet. Die Notation $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ ist aus mathematischen Gründen, auf die wir im Moment gerade nicht eingehen wollen, allerdings ein wenig fragwürdig. Ganz uneingeschränkt richtig ist hingegen die Gleichung $\mathrm{i}^2 = -1$.

Währenddem wir die geometrische Bedeutung der Addition sofort verstehen (Vektoraddition der beiden Zahlenvektoren: $\vec{z}_3 = \vec{z}_1 + \vec{z}_2$), erschliesst sich uns grafisch noch nicht so richtig, was bei der Multiplikation genau passiert. Das ändert sich aber in Kürze, wenn wir neben der Summenschreibweise auch noch die Euler-Darstellung komplexer Zahlen kennenlernen.

4 Komplex Konjugiertes z^* und Betrag $|z|$

Spiegeln wir den zu einer komplexen Zahl z gehörenden Punkt in der Gauss'schen Zahlenebene an der reellen Achse, so kehrt sich dadurch das Vorzeichen des Imaginärteils um. Wir bezeichnen das Resultat als das **komplex Konjugierte** z^* von z. Wir definieren also:

$$z = x + y\mathrm{i} \qquad \Rightarrow \qquad \textbf{Komplex Konjugiertes von } \boldsymbol{z}\textbf{:} \qquad z^* := x - y\mathrm{i} \tag{4}$$

Weiter soll der **Betrag** einer komplexen Zahl für den Abstand des zugehörigen Punktes (x, y) vom Ursprung $O(0, 0)$ stehen. Unter Verwendung des Satzes von Pythagoras definieren wir sinngemäss:

$$z = x + y\mathrm{i} \qquad \Rightarrow \qquad \textbf{Betrag von } \boldsymbol{z}\textbf{:} \qquad |z| := \sqrt{x^2 + y^2} \tag{5}$$

"Zum Spass" betrachten wir das Produkt von z^* und z:

$$z^* \cdot z = (x - y\mathrm{i})(x + y\mathrm{i}) = x^2 - (y\mathrm{i})^2 = x^2 - y^2\mathrm{i}^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$

Das bedeutet, das Betragsquadrat $|z|^2$ einer komplexen Zahl z lässt sich mittels des komplex Konjugierten z^* sehr leicht berechnen:[2]

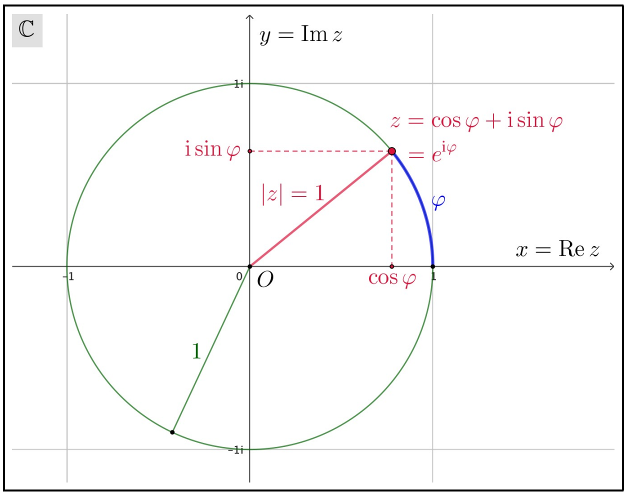
$$|z|^2 = z^* z \tag{6}$$

5 Die Euler-Formel $e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$

Richtig bemerkenswert ist die sogenannte

$$\textbf{Euler-Formel:} \qquad e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i} \cdot \sin\varphi \quad , \tag{7}$$

die wir an dieser Stelle nicht weiter beweisen, sondern als uneingeschränkt richtig akzeptieren wollen. Dabei steht auf der rechten Seite ganz offensichtlich eine komplexe Zahl mit Realteil $\cos\varphi$ und Imaginärteil $\sin\varphi$. In der Gauss'schen Zahlenebene muss es sich dabei um einen Punkt auf dem Einheitskreis um den Ursprung $O(0, 0)$ handeln, denn das entspricht gerade der ein Punkt mit Koordinaten $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ entspricht konzeptuell gerade der Definition von Cosinus- und Sinusfunktion am Einheitskreis. Der Winkel φ steht dann im Bogenmass für die zugehörige Bogenlänge auf dem Einheitskreis, startend bei der reellen Achse (positive Werte im Gegenuhrzeigersinn):



[2]Diese Formel wird uns bei Wellenfunktionen, wo uns ja auch das Betragsquadrat interessiert, immer wieder sehr gute Dienste leisten.

In der Euler-Formel steht e für die **Euler'sche Zahl**, also $e \approx 2.718$. Das Bemerkenswerte an (7) ist, dass sich nun jede komplexe Zahl auf dem Einheitskreis der komplexen Ebene als Potenz mit Basis e schreiben lässt. Folglich gilt umgekehrt für den Betrag jeder komplexen Zahl der Form $e^{i\varphi}$:

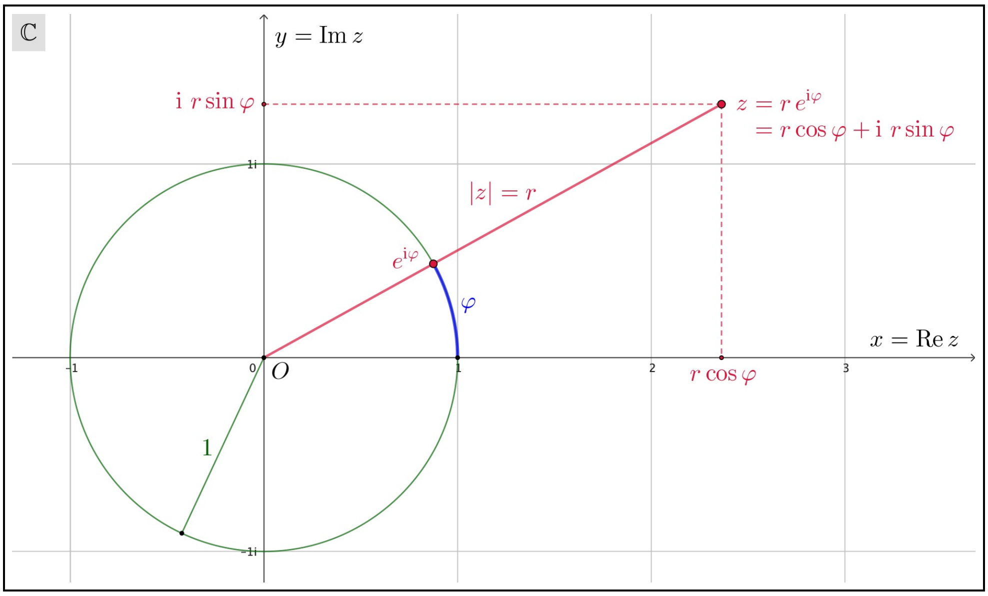
$$|e^{i\varphi}| = 1 \tag{8}$$

6 Die Euler-Darstellung $z = re^{i\varphi}$

Damit aber noch nicht genug. Durch Multiplikation von $e^{i\varphi}$ mit einer positiven reellen Zahl $r > 0$ können wir grundsätzlich zu jedem beliebigen Punkt in der komplexen Ebene gelangen, also zu jeder beliebigen komplexen Zahl z, für die dann gilt:

$$z = r \cdot e^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \underbrace{r\cos\varphi}_{=\mathrm{Re}\,z} + i \cdot \underbrace{r\sin\varphi}_{=\mathrm{Im}\,z}$$

Grafisch:



Anders ausgedrückt: Jede komplexe Zahl z lässt sich neu auch durch ein Paar von **Polarkoordinaten** r (Radius resp. Betrag) und φ (Winkel) ausdrücken: $z = (r, \varphi)$. Damit lässt sich z dank der Euler-Formel in der sogenannten

$$\textbf{Euler-Darstellung:} \qquad z = r\,e^{i\varphi} \tag{9}$$

notieren. Die hierin enthaltene Potenz $e^{i\varphi}$ bedeutet beim Rechnen mit dieser Darstellung, dass die Potenzgesetze verwendet werden dürfen/können/müssen. Das ist die grosse Stärke dieser Euler-Darstellung. Z.B. verstehen wir damit sofort, was bei der Multiplikation zweier komplexen Zahlen passiert. Es seien also $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$. Dann folgt für das Produkt dieser beiden Zahlen:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1e^{i\varphi_1} \cdot r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

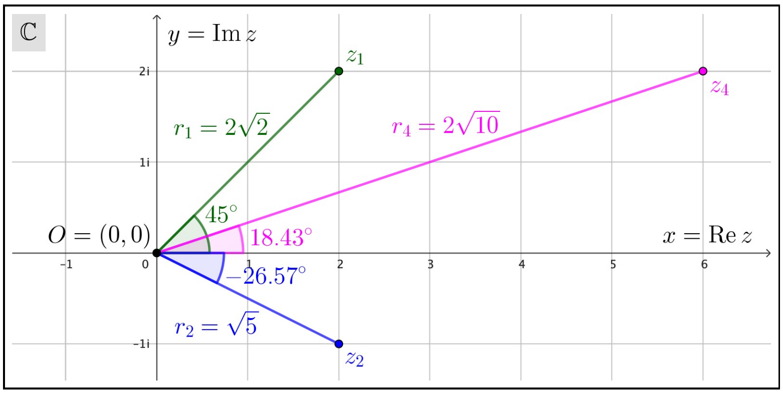
Somit gehört zum Resultat dieser Multiplikation die komplexe Zahl $z = re^{i\varphi}$ mit Betrag $r = r_1r_2$ und Winkelkoordinate $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen werden somit dei Beträge miteinander zum neuen Betrag multipliziert, während die Winkelkoordinaten addiert werden müssen.

Ebenso kann man sagen: Multipliziere ich eine komplexe Zahl z_1 mit einer komplexen Zahl $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$, so wird dadurch z_1 um r_2 vom Ursprung O weggestreckt und zusätzlich um φ_2 um den Ursprung O gedreht. Die Multiplikation mit einer komplexen Zahl entspricht somit stets einer **Drehstreckung** bezüglich des Ursprungs O!

Betrachten wir nochmals unser Zahlenbeispiel von Seite 1. Dort war $z_1 = 2 + 2\mathrm{i}$. Das entspricht den Polarkoordinaten $r_1 = 2\sqrt{2}$ und $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ ($\widehat{=}\, 45°$). Für $z_2 = 2 - \mathrm{i}$ findet man: $r_2 = \sqrt{5}$ und $\varphi_2 \approx -0.1476\pi$ ($\widehat{\approx} - 26.57°$). Für das Produkt dieser beiden Zahlen erhalten wir:

$$z_4 = z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\, e^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)} \approx 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot e^{\mathrm{i}(\frac{1}{4}-0.1476)\pi} \approx 2\sqrt{10} \cdot e^{\mathrm{i}\cdot 0.1024\pi}$$

Das Produkt von z_1 und z_2 ist somit eine Zahl z_4 mit Betrag $r_4 = 2\sqrt{10} \approx 6.32$ und Winkelkoordinate $\varphi_4 \approx 0.1024\pi$ ($\approx 18.43°$). Das sehen wir so auch in der Grafik:



Man kann das auch so sagen: Durch die Multiplikation mit z_2 wir die Zahl z_1 um den Faktor $r_2 = \sqrt{5}$ vom Ursprung weggestreckt und gleichzeitig um den Winkel $\varphi_2 \approx -26.57°$ um den Ursprung gedreht. Da es sich um einen negativen Winkel handelt, ist dies eine Drehung im Uhrzeigersinn.

7 Und wozu dienen nun eigentlich komplexe Zahlen?

Die Stärken komplexer Zahlen sind vielfältig: In der Quantenmechanik wird durch sie der Formalismus vereinfacht, weil sich damit die beiden rellen Funktionen, die es bräuchte, um die Wellenfunktion von Materiewellen vollständig zu beschreiben, elegant zu einer einzigen Funktion zusammenfassen lassen. In der Mathematik ebenfalls ungeheuer wichtig, allerdings kann ihr ganzer Nutzen auf Stufe Gymnasium noch nicht so richtig zum Tragen kommen, weil sich die Probleme in der Regel sehr gut ausschliesslich und ebenso gut mit reellen Zahlen behandeln lassen.

Ein kleines Beispiel sei hier aber doch noch angeführt. Vielleicht wurde in der Trigonometrie oder in der Akustik (Schwingungen und Wellen) mal kurz auf die sogenannten **Additionstheoreme** hingewiesen:

Additionstheoreme:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\, \cos\beta + \cos\alpha\, \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\, \cos\beta - \sin\alpha\, \sin\beta$$

Das bedeutet, Sinus oder Cosinus einer Summe $\alpha + \beta$ zweier Winkel lassen sich auf die Sinus- und Cosinuswerte der Einzelwinkel α und β zurückführen. Das zu beweisen ist im Reellen zwar nicht besonders schwierig, aber mit komplexen Zahlen ist der Beweis so richtig einfach! Man braucht nur den Ausdruck für $e^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)}$ auf zwei verschiedene Arten aufzuschreiben und dann die beiden Schreibweisen miteinander zu vergleichen:

Einerseits ist (Euler): $\quad e^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha+\beta)$

Andererseits finden wir:

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} &= e^{\mathrm{i}\alpha} \cdot e^{\mathrm{i}\beta} = (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta + \mathrm{i}\cos\alpha\sin\beta + \mathrm{i}\sin\alpha\cos\beta + \mathrm{i}^2\sin\alpha\sin\beta \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + \mathrm{i}\,(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \end{aligned}$$

In beiden Fällen ist der gesamte Ausdruck eine komplexe Zahl z, zu der ein eindeutiger Realteil und ein eindeutiger Imaginärteil gehört. Somit können wir miteinander identifizieren:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left(e^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)}\right) &= \cos(\alpha+\beta) \overset{!}{=} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \mathrm{Im}\left(e^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)}\right) &= \sin(\alpha+\beta) \overset{!}{=} \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \qquad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$