

Doppelspalt-Experiment und Materiewellen

1 Das Doppelspalt-Experiment mit Licht

“Ist Licht eine Welle oder ein Teilchen?”

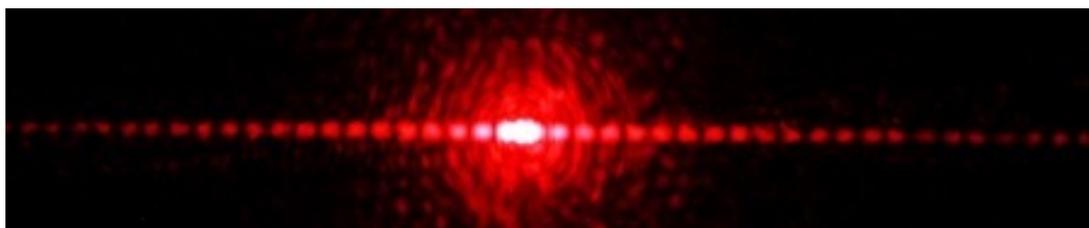
Die einfachste Antwort ist zunächst, dass die Beobachtung selbst zeigen muss, was denn nun tatsächlich zutrifft. Aber genau an dieser Stelle wird es eben vertrackt, denn Licht scheint manchmal Eigenschaften aufzuweisen, die wir grundsätzlich mit dem Verhalten von Wellen in Verbindung bringen, in anderen Momenten scheint sich Licht hingegen als Teilchen zu verhalten. Letztlich ist Licht aber *ein einziges* Phänomen und wir sollten gut verstehen, was es mit diesem oft zitierten **Welle-Teilchen-Dualismus** auf sich hat.

Kein Phänomen kann die Verbindung zwischen Wellen- und Teilchenverhalten besser verdeutlichen als das **Doppelspalt-Experiment**, mit dem **Thomas Young** bereits im Jahr 1802 die Wellennatur des Lichtes nachwies.

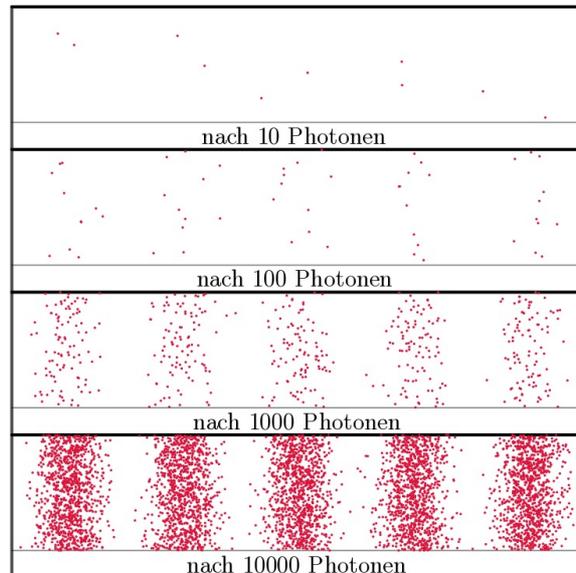


Thomas Young (1773 – 1829)

Stellen wir uns monochromatisches Licht vor, das auf einen Doppelspalt trifft, wobei das hindurchtretende Licht dahinter auf einen Schirm (= Fläche) trifft oder auf einem fotografischen Film festgehalten wird. Für uns heute ist dieser Versuch sehr einfach durchführbar, denn mit dem Laser haben wir wie selbstverständlich eine hervorragende monochromatische Lichtquelle zur Verfügung. Bei normaler Lichtintensität beobachten wir ein typisches **Interferenzmuster** (= Überlagerungsmuster), bei dem die Intensität von einem Maximum (**konstruktive Interferenz**) im Zentrum des Films auf null (**destruktive Interferenz**) abfällt, danach wieder ein Maximum erreicht usw. Das Licht verhält sich ganz nach der klassischen Erwartung als Welle, denn Teilchen interferieren nicht miteinander. Das machen nur Wellen, wie uns von der Akustik her bestens bekannt ist.



Nehmen wir nun an, dass die Intensität drastisch reduziert wird – Young konnte dies noch nicht bewerkstelligen und einen Film hatte er auch noch nicht zur Verfügung – sodass auf dem Schirm kein Muster mehr zu beobachten ist. Der Film registriert immer noch das auf ihn einfallende Licht, nun allerdings sporadisch an ganz unterschiedlichen Orten. Ganz offensichtlich wird *ein Lichtteilchen nach dem anderen* registriert. Das Licht wird offenbar in Portionen (= Energiepakete = Teilchen = Photonen) von der Lichtquelle ausgesendet und kommt auch in Portionen auf dem Schirm an. Das Licht ist quantisiert. Die nachfolgende Abbildung oben auf der nächsten Seite zeigt das Ergebnis, bei dem jedes eintreffende Teilchen als Punkt dargestellt wird. Obwohl die Verteilung der Punkte zu Beginn völlig unvorhersehbar wirkt, können wir allmählich ein regelmäßiges Muster erkennen.



Die Intensität hinter dem Doppelspalt zeigt ein Interferenzmuster



Die Verbindung zwischen Wellen und Teilchen beruht auf zwei wesentlichen Beobachtungen:

- Erstens ist der genaue Ort, an dem das nächste Photon auftrifft, nicht vorhersagbar. Prinzipiell sollte die **Wahrscheinlichkeit**, es in einem bestimmten Gebiet zu entdecken, proportional zur Dichte der dort befindlichen Punkte sein – ist die Punktdichte hoch, dann ist auch die Wahrscheinlichkeit groß, ist die Punktdichte klein, dann ist auch die Wahrscheinlichkeit gering. Steckt also in der Punktdichte ein Muster, dann steckt dieses auch in der *Wahrscheinlichkeit*.
- Zweitens zeigen sorgfältige Untersuchungen, dass die Punktdichte in einem bestimmten Gebiet direkt proportional zur **Intensität** der klassischen Wellentheorie in diesem Bereich ist. Diese ist wiederum proportional zur quadrierten Amplitude E_0 der elektromagnetischen Welle. Insbesondere werden nie Photonen an den Orten beobachtet, an denen die Wellentheorie Gebiete mit destruktiver Interferenz vorhersagt. *Obwohl ein Photon nach dem anderen beobachtet wird, ist die Wellennatur des Lichts somit immer noch an der Intensität erkennbar.*

In Kombination finden wir: Die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen in einem bestimmten (kleinen) Gebiet auf dem Fotofilm zu registrieren, ist proportional zur Intensität des Lichts an dieser Stelle. Diese wiederum ist proportional zum Amplitudenquadrat der Welle. Das bedeutet: Die Teilchenwahrscheinlichkeit ist proportional zum Amplitudenquadrat der zugehörigen Welle. Diese Verbindung von Wellen- und Teilcheneigenschaft ist der Eckpfeiler der Quantenmechanik:

Die Verbindung zwischen Teilchen- und Wellennatur

Wenn wir die **Teilchennatur** eines Phänomens beobachten, können wir nicht mit Bestimmtheit vorhersagen, wo ein gegebenes Teilchen zu finden sein wird. Wir können lediglich die **Wahrscheinlichkeit** angeben, es in einem bestimmten Gebiet anzutreffen. Diese Wahrscheinlichkeit ist proportional zum Amplitudenquadrat der zugehörigen **Welle** in dieser Region:

$$\text{Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen in einem Gebiet zu beobachten} \sim \left(\text{Amplitude der Welle in diesem Gebiet} \right)^2$$

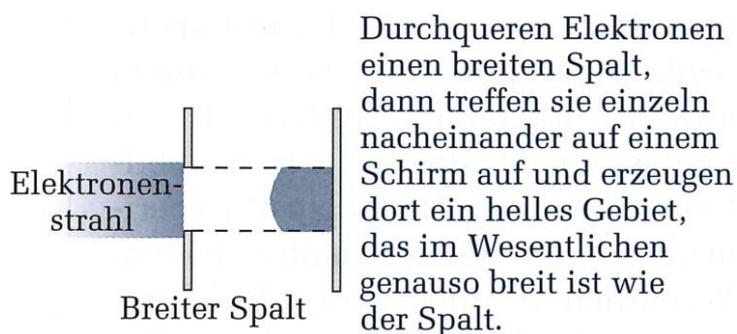
Nennen wir die Dinge beim Namen: Ist die fragliche Welle das elektromagnetische Feld, dann ist das "dazugehörige Teilchen" das Photon. Ist umgekehrt das fragliche Teilchen das Photon, dann ist die "zugehörige Welle", sein Alter Ego, das elektromagnetische Feld. Die Amplitude dieses Feldes, resp. ihr Quadrat, gibt die Wahrscheinlichkeit an, das zugehörige Teilchen – das Photon – an einem bestimmten Ort zu finden. Dies ist unser neues Verständnis für die Intensität einer elektromagnetischen Welle.

Wir werden gleich erfahren, dass auch das Verhalten massebehafteter Teilchen, wie z.B. Elektronen, durch Wellen beschrieben wird. Auch die Amplitudenquadrate dieser Wellen stehen für die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der Teilchen an verschiedenen Orten. Allerdings gibt es hier kein erkennbares Alter Ego. Die Wellen repräsentieren dann offenbar "nur" Wahrscheinlichkeiten, sonst nichts.

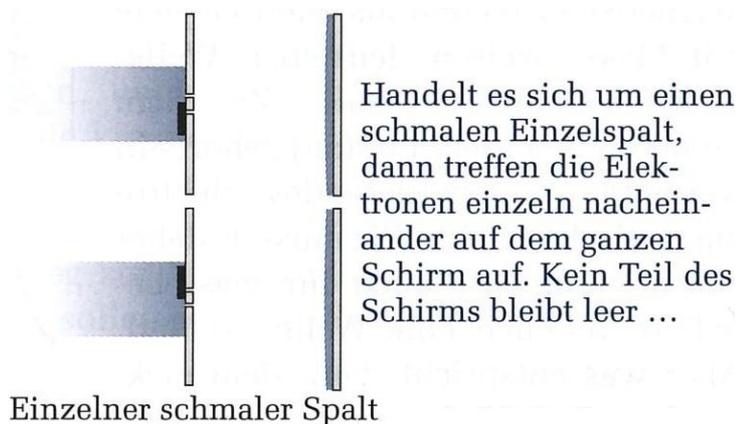
2 Das Doppelspalt-Experiment mit Elektronen

Stellen wir uns nun einen Strahl monoenergetischer Elektronen¹ – also ein Strahl aus Elektronen mit genau derselben Energie – vor, die auf eine Abschirmung mit einem Spalt treffen. Dahinter befindet sich ein Leuchtschirm, der das Eintreffen des Elektrons durch einen kleinen Lichtblitz anzeigt.

"Breiter" Spalt: Ist der Spalt "breit" – was immer das genau heißen mag – so geht der Strahl einfach durch und erzeugt – Elektron für Elektron – einen Streifen auf dem Schirm, der im Wesentlichen genauso breit ist wie der Spalt selber:

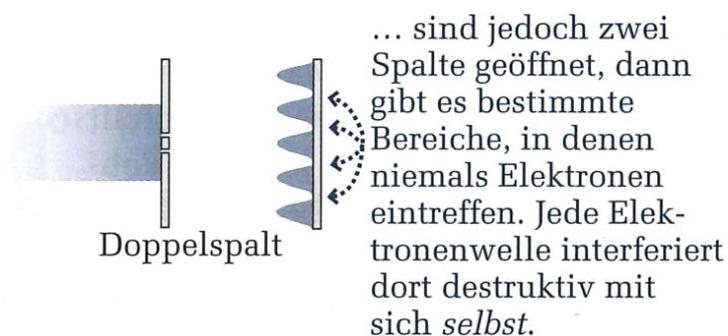


"Schmaler" Spalt: Bei einem "schmalen" Spalt aber nehmen wir *auf dem gesamten Schirm* immer wieder Lichtblitze von Elektronen wahr:

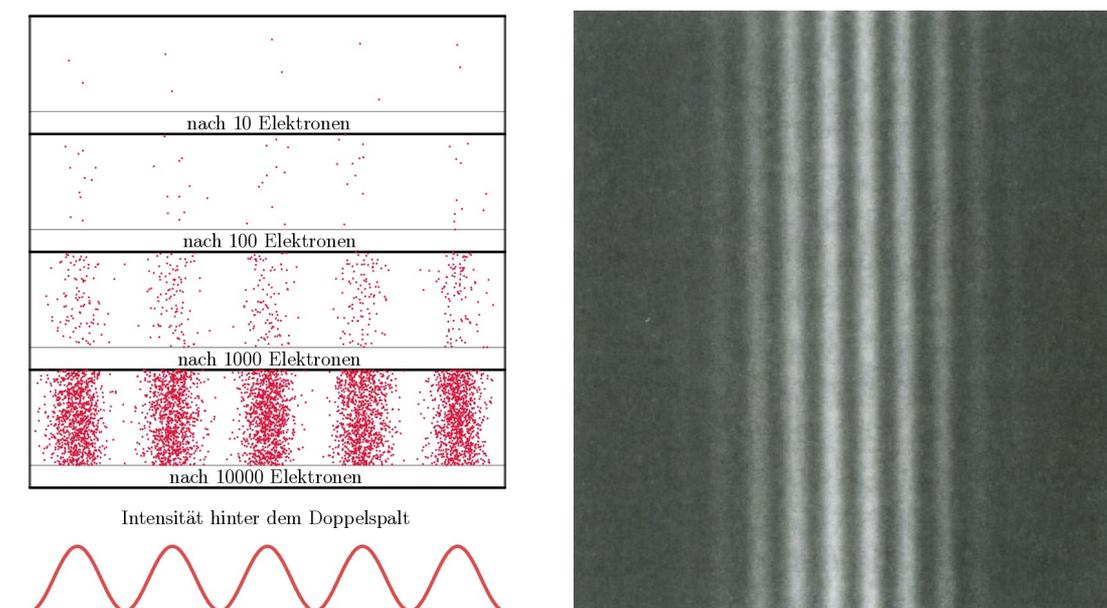


¹Das Elektron ist unser massebehaftetes Objekt der Wahl, weil seine Masse relativ gering ist. Wie wir bald sehen werden, macht dies seine Wellenlänge so groß, dass sich seine Wellennatur relativ einfach erschließt.

Zwei nahe beieinander liegende, schmale Spalte: Wir fügen einen zweiten schmalen Spalt hinzu. Nun gibt es Orte auf dem Schirm, an denen gar keine Elektronen auftreffen. Das Öffnen einer zweiten "Tür" führt also dazu, dass die Zahl der Elektronen, die pro Zeiteinheit an bestimmten, gleichmäßig auf dem Schirm verteilten Orten auftreffen, auf null abfällt! Das gilt auch dann, wenn der Strom der Elektronen so gering ist, dass jeweils nur ein Elektron nach dem anderen durch einen der Spalte geflogen sein kann! Das lässt sich keinesfalls mit der Annahme erklären, dass Elektronen simple Teilchen sind, die den einen oder den anderen Spalt durchqueren müssen. Für ein Teilchen, das nur einen Spalt durchquert, gäbe es keinen Grund, bestimmte Bereiche auf dem Schirm zu meiden, nur weil irgendwo ein anderer Spalt geöffnet worden ist. Im Gegenteil: Dieses Verhalten entspricht der destruktiven Interferenz, also einer Wellenerscheinung. Weil Interferenz mehrere kohärente Wellen erfordert, verhält sich *jedes* einzelne Elektron folglich wie eine Welle, die gleichzeitig *beide* Spalte durchquert.



Die Abbildung unten links zeigt schematisch, wie sich die durch die Elektronen hervorgerufenen Lichtblitze im Lauf der Zeit anhäufen, wenn beide Spalte geöffnet sind. Rechts davon sehen wir die Fotografie eines Musters aus einem tatsächlichen Doppelspalt-Experiment. Die Verteilung links kommt uns bekannt vor – es handelt sich um dasselbe Muster, das beim Doppelspalt-Experiment mit Photonen entsteht. Wesentlich ist hier: Sowohl elektromagnetische Wellen als auch Objekte mit Masse weisen denselben Welle-Teilchen-Dualismus auf. Zu dem Lichtteilchen (dem Photon) gehört ein wellenförmig oszillierendes elektromagnetisches Feld. Wir müssen daher akzeptieren, dass auch für massebehaftete Teilchen eine Welle existiert. Aber was entspricht dann dem elektromagnetischen Feld wie beim Licht? Was oszilliert bei einer Materiewelle?



Um wenigstens eine Eigenschaft dieser Welle ableiten zu können, kehren wir zu denselben beiden Beobachtungen zurück, die wir bereits beim Licht gemacht haben:

- Obwohl offenbar unmöglich vorhergesagt werden kann, wo das nächste Elektron auftreffen wird, sollte die Wahrscheinlichkeit, es an einem bestimmten Ort zu finden, proportional zur Punktdichte an diesem Ort sein.
- Wenn wir akzeptieren, dass von den beiden Spalten zwei kohärente Wellen ausgehen, dann erwarten wir ein Interferenzmuster. Insbesondere erwarten wir, dass die Amplitude im Zentrum des Musters, wo konstruktive Interferenz vorliegt, doppelt so groß ist wie im Fall eines einzelnen offenen Spalts. Das Amplitudenquadrat, das proportional zur Intensität ist, wäre dann vier Mal so hoch. Und was zeigt uns das Experiment? Es zeigt eine Punktdichte, die bei zwei offenen Spalten im Zentrum vier Mal größer ist als bei einem offenen Spalt. Tatsächlich gilt für das gesamte Muster dieselbe Proportionalität zwischen der Punktdichte und der Intensität – dem Quadrat der Wellenamplitude – die wir von der üblichen Analyse des Doppelspalts kennen.

Kombinieren wir diese beiden Beobachtungen – dass die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen anzutreffen, und das Quadrat der Wellenamplitude proportional zur selben Sache sind (nämlich zur Punktdichte) – kommen wir zur selben Schlussfolgerung wie beim Licht:

Die Verbindung zwischen Teilchen- und Wellennatur

*Wird ein Phänomen als **Teilchen** wahrgenommen, dann können wir nicht mit Genauigkeit vorhersagen, wo ein gegebenes Teilchen anzutreffen sein wird. Wir können bestenfalls die Wahrscheinlichkeit angeben, es in einem bestimmten Gebiet zu finden. Diese Wahrscheinlichkeit ist proportional zum Amplitudenquadrat der zugehörigen **Welle**:*

$$\text{Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen in einem Gebiet zu beobachten} \sim \left(\text{Amplitude der Welle in diesem Gebiet} \right)^2$$

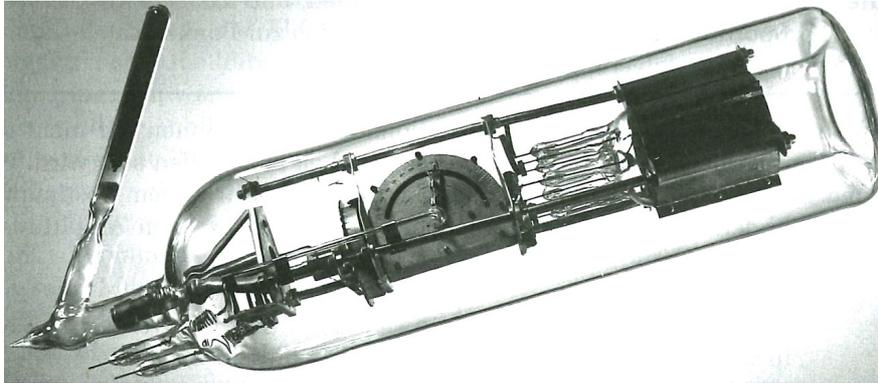
Obwohl elektromagnetische Strahlung und massebehaftete Objekte denselben grundlegenden Welle-Teilchen-Dualismus teilen, unterscheiden sich Materiewellen in einem wichtigen Punkt von Strahlung: Sie können nicht direkt gemessen werden. Elektrische und magnetische Felder können voneinander isoliert werden und Kräfte auf ein Objekt ausüben – deshalb lassen sie sich direkt wahrnehmen. Wir kennen aber keinen gleichermaßen geeigneten Weg zur Wahrnehmung von Materiewellen. Niemand hat jemals eine „gesehen“. Wie sollen wir also die Frage „Was oszilliert da?“ beantworten? Wie es scheint, bleibt uns nur ein Ausweg – die *Wahrscheinlichkeit* oszilliert.²

3 Nachweise der Interferenz von Materiewellen

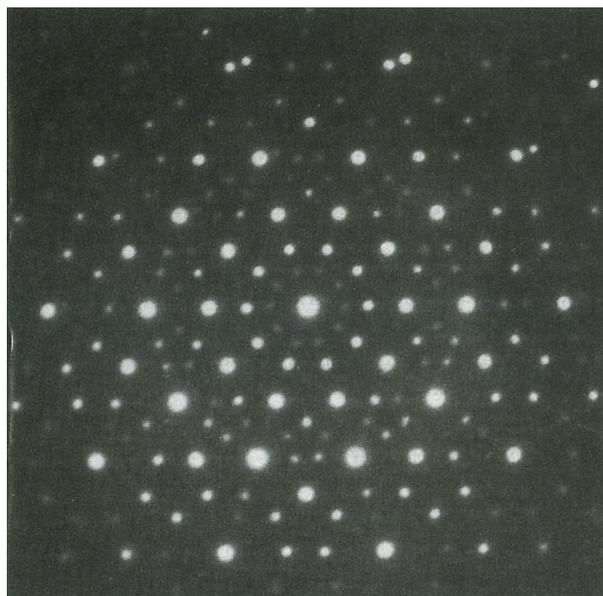
Der Doppelspalt ist im Grunde genommen das einfachste Experiment, mit dem die Interferenz von Materiewellen nachgewiesen werden kann. Unglücklicherweise lässt es sich aber nicht so leicht durchführen. Die ersten Hinweise auf die Wellennatur der Materie erhielten Clinton J. Davisson und Lester H. Germer 1927. Bei der Untersuchung von Metalloberflächen mittels der Streuung eines Elektronenstrahls an einem Nickelkristall stellten die beiden überrascht fest, dass die Elektronen nur bei bestimmten diskreten Winkeln gestreut werden. Teilchen sollten aber kein derartiges Verhalten zeigen.

²Häufig gibt es die falsche Auffassung, dass die Masse des Elektrons oszilliert, etwa indem Teile davon irgendwie vor- und zurückschwingen. Die Welle ist jedoch nicht das Teilchen. Die Masse schwingt in einer Materiewelle genauso wenig wie das Photon in einer elektromagnetischen Welle. Es ist besser, beide Phänomene in gleicher Weise als Wellen schwingender Wahrscheinlichkeit zu betrachten. Andere mögliche Vorstellungen sollten nur herangezogen werden, wenn sie notwendig werden.

Mikroskopisch betrachtet, ist ein Kristall eine Ansammlung von regelmäßig angeordneten Atomen. Fällt eine Welle ein, reflektiert jedes Atom die Welle in alle Richtungen. Im Prinzip wird jedes Atom zur Punktquelle einer neuen Welle. Wie die zahlreichen Kerben eines Beugungsgitters erzeugen diese Quellen ein Interferenzmuster, in dem scharfe Interferenzmaxima von breiten Gebieten mit geringer Intensität getrennt werden. Im Experiment von Davisson und Germer, deren Messapparatur in der nächsten Abbildung gezeigt wird³, stimmt die experimentelle Messrate, aufgetragen über dem Winkel, perfekt mit einer theoretischen Voraussage überein, die auf der Annahme beruht, dass sich ein Elektron wie eine räumlich verteilte Welle verhält, die von vielen Atomen reflektiert wird und mit sich selbst *interferiert*.



Der Schlüssel zur experimentell erfolgreichen Enthüllung der Wellennatur von Elektronen sind die wesentlichen Abmessungen der Messanordnung. Hier handelt es sich um atomare Abstände, die sehr gering sind. Kristalle sind daher exzellente Prüfstände zur Bestimmung einer Wellennatur. Heutzutage haben sich die Verhältnisse aber umgekehrt – die als gesichert geltende Wellennatur des Elektrons wird dazu eingesetzt, etwas über den Kristall zu erfahren. Im Wesentlichen bildet das Beugungsmuster diese mikroskopisch kleine Geometrie ab. Die nächste Abbildung ist ein gutes Beispiel dafür. Es stammt von Elektronen, die an einem einzigen Korn einer Aluminium-Mangan-Legierung gebeugt werden, und zeigt, dass die Anordnung der Atome eine fünfzählige Symmetrie aufweist. Tatsächlich war diese Symmetrie bei ihrer Entdeckung eine ziemliche Überraschung (D. Shechtman et al., Phys. Rev. Letters 53, 1951 (1984)). Die Untersuchungen von "Quasikristallen" mit derartigen Symmetrien sind seitdem in vollem Gange und wurden 2011 mit dem Chemie-Nobelpreis für D. Shechtman gekrönt.



³Im Bild erkennbar ist insbesondere der Mechanismus, durch den der Probenwinkel verändert werden kann

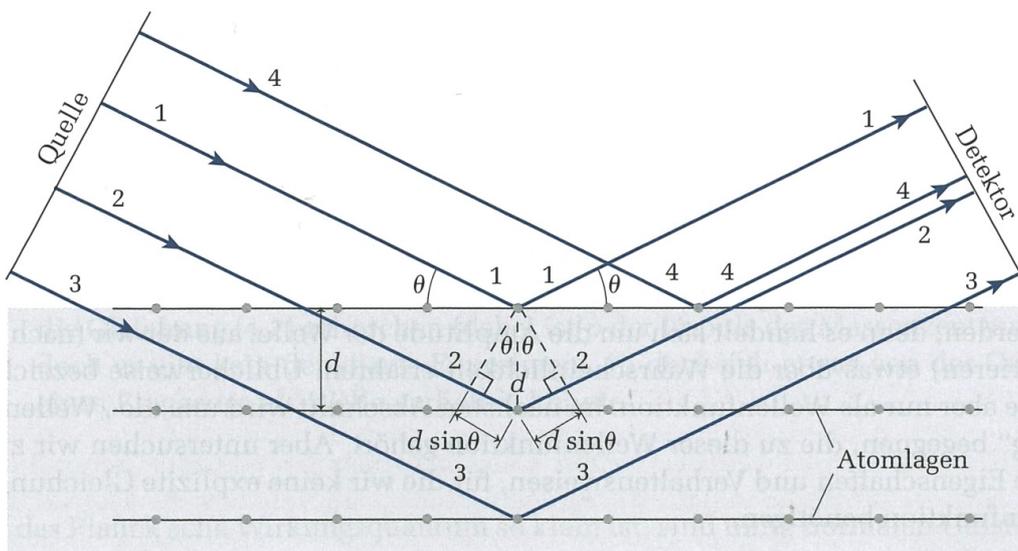
Das Bragg'sche Gesetz

In einem Kristall dringen Materiewellen oft viele Atomebenen tief unter die Oberfläche vor. Die am meisten benutzte Beziehung für konstruktive Interferenz, die wir gleich ableiten werden, ist daher etwas aufwändiger als die eines einfachen Gitters.

Nehmen wir, wie in der folgenden Abbildung gezeigt, an, dass ein Strahl unter dem Winkel θ relativ zur Ebene von Atomen einer Oberfläche auf den Kristall einfällt und der Detektor so ausgerichtet ist, dass er Wellen empfängt, die unter demselben Winkel von der Ebene reflektiert werden. Ein Atom in der obersten Lage reflektiert einen kleinen Teil der Welle in alle Richtungen, den wir als Strahl 1 bezeichnen. Ein Teil der Welle dringt aber tiefer vor, daher kann ein Atom in der zweiten Atomlage ebenfalls einen Teil der Welle in alle Richtungen zurückwerfen. Wie die Abbildung zeigt, muss Strahl 2 im Vergleich mit Strahl 1 die um $2d\sin\theta$ größere Entfernung zum Detektor zurücklegen, wobei d der Abstand zwischen den Atomlagen ist. Strahl 3 muss im Vergleich mit Strahl 2 dieselbe längere Strecke zurücklegen. Bei jeder weiteren Atomlage wiederholt sich das Spiel. Da der einfallende Strahl und der Detektor denselben Winkel aufweisen, müssen Wellen, die von Atomen derselben Lage gestreut werden – beispielsweise Strahl 1 und Strahl 4 – immer dieselbe Entfernung zwischen Quelle und Detektor zurücklegen. Daher beobachten wir Interferenzen nur zwischen Strahlen, die von unterschiedlichen Ebenen in verschiedener Tiefe im Kristall ausgehen – sehr schön! Konstruktive Interferenz erhalten wir bei den Winkeln:

$$2d\sin\theta = m\lambda \quad \text{mit } m = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

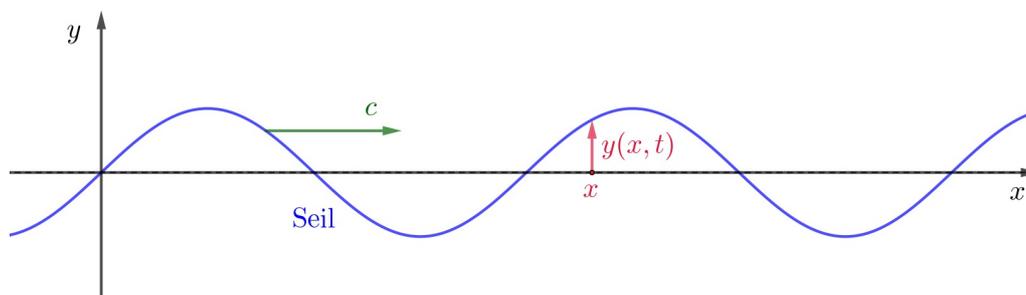
Dies wird als **Bragg'sches Gesetz** bezeichnet. Es ist benannt nach dem Team aus W.H. Bragg und seinem Sohn W.L. Bragg, die 1915 den Nobelpreis für ihre Arbeiten über Beugung erhielten. Zwar haben sie nicht mit Elektronen gearbeitet, sondern mit Röntgenstrahlen, es gilt aber dieselbe Gleichung, denn eine Welle bleibt eine Welle.



Wir hatten bereits früher festgestellt, dass sich Röntgenstrahlen wie Teilchen verhalten können, während das sichtbare Licht mit seiner größeren Wellenlänge sich wie eine Welle verhält. Der Abstand d der Atomlagen eines Kristalls ist so gering, dass sogar Röntgenstrahlen sich wie Wellen verhalten. Sind die Abstände nur klein genug, verhält sich alles wie eine Welle, und daher wurden Beugungsmuster auch schon mit Neutronen und sogar ganzen Atomen erzeugt. Um obige Interferenzbedingung bei Materiewellen anzuwenden – etwa zur Bestimmung des genauen Abstands der Atomlagen d – müssen wir natürlich die Wellenlänge kennen. Wir werden uns daher bald den quantitativen Eigenschaften von Materiewellen zuwenden.

4 Eigenschaften von Materiewellen

Welche Eigenschaften machen eine Welle aus? Sie sollte eine Wellenlänge aufweisen, eine Frequenz und eine Geschwindigkeit. Sie sollte zudem eine Amplitude besitzen, die sich in Abhängigkeit von Ort und Zeit verändert. Die allgemeine Bezeichnung der Funktion, durch die wir die Amplitude erhalten, lautet **Wellenfunktion**. Da das, was schwingt, von der Art der Welle abhängt, benutzen wir für Wellenfunktionen unterschiedlicher Art auch unterschiedliche Symbole. Bei einer Transversalwelle auf einem Seil benutzen wir oft das Symbol $y(x, t)$. Die transversale Auslenkung y des Seils verändert sich als Funktion des Orts x und der Zeit t :



Für eine elektromagnetische Welle, die sich entlang der x -Achse ausbreitet, haben wir die beiden Funktionen $\vec{E}(x, t)$ und $\vec{B}(x, t)$. Sie beschreiben, wie sich das elektrische Feld \vec{E} und das magnetische Feld \vec{B} mit Ort und Zeit verändern. Bei **Materiewellen** bezeichnen wir die Wellenfunktion mit $\Psi(x, t)$. Genau genommen sollte sie als **Wahrscheinlichkeitsamplitude** bezeichnet werden, denn es handelt sich um die Amplitude der Welle, aus der wir (nach dem Quadrieren) etwas über die Wahrscheinlichkeit erfahren. Üblicherweise bezeichnen wir sie aber nur als Wellenfunktion. Im nächsten Abschnitt wird uns die "Wellengleichung" begegnen, die zu dieser Wellenfunktion gehört. Aber untersuchen wir zuerst einige Eigenschaften und Verhaltensweisen, für die wir keine explizite Gleichung der Wellenfunktion benötigen.

Wellenlänge

Dreh- und Angelpunkt unserer bisherigen Diskussion scheint die Wellenlänge zu sein. Um was handelt es sich hierbei? Louis de Broglie stellte 1924 die folgende Hypothese auf: Die **Wellenlänge** λ der zu einem massebehafteten Objekt gehörenden Materiewelle hängt von ihrem Impuls p ab und ist durch

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (2)$$

gegeben. Diese Beziehung ist anhand von Experimenten, selbst für relativistische Geschwindigkeiten, über jeden Zweifel hinaus gesichert. Aus Experimenten wie der Beugung an Kristallen, in denen der Impuls der Elektronen eines Strahls bekannt ist, sowie der Analyse der Beugungsmuster erhalten wir die Wellenlänge. Für diese Beziehung erhielt de Broglie 1929 den Nobelpreis. In Anerkennung seiner Arbeit bezeichnen wir die Materiewellenlänge als **De-Broglie-Wellenlänge**. Zentrale Bedeutung hat dabei, dass Gleichung (2) mit der für elektromagnetische Strahlung gültigen Gleichung $p = \frac{h}{\lambda}$ identisch ist. *Diese Beziehung zwischen Wellenlänge und Impuls ist für alle Phänomene allgemeingültig.*

Weil das Planck'sche Wirkungsquantum h so klein ist, sind unter normalen Umständen die Wellenlängen von Materiewellen klein genug, um teilchenartiges Verhalten zu ermöglichen. Wenn jedoch der Impuls eines Teilchens gegen null geht, würde dann seine Wellenlänge nicht beliebig groß werden? Wir könnten zu dem beunruhigenden Schluss kommen, dass sich jedes ruhende Objekt als Welle verhalten sollte. Wir werden dieser Zwickmühle in später wieder begegnen. Hier soll die Bemerkung genügen, dass nur sehr schwer sichergestellt werden kann, dass sich irgendetwas tatsächlich in Ruhe befindet.

Frequenz

Interferenzmuster machen eindeutige Aussagen hinsichtlich der Wellenlänge von Materiewellen. Die Aussagen zur Frequenz sind weniger direkt, allerdings gilt für die **Frequenz f von Materiewellen** dieselbe Beziehung wie bei der elektromagnetischen Strahlung:

$$f = \frac{E}{h} \quad (3)$$

Oft ist es sinnvoller, die Gleichungen (2) und (3) durch die folgendermaßen definierte **Wellenzahl k** und **Kreisfrequenz ω** auszudrücken:

$$k := \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{und} \quad \omega := \frac{2\pi}{T} \quad . \quad (4)$$

Beachte, dass die Wellenzahl eine Art "räumliche Frequenz" ist. In derselben Weise, in der die Kreisfrequenz ω umgekehrt proportional zur zeitlichen Periode T ist, ist auch k umgekehrt proportional zur Wellenlänge λ (= räumliche Periode). Eine weitere sehr nützliche Definition lautet

$$\hbar := \frac{h}{2\pi} \approx 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \quad . \quad (5)$$

Anhand dieser Definitionen können wir die **grundlegenden Welle-Teilchen-Gleichungen** formulieren:

$$\text{Impuls:} \quad p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \quad (6)$$

$$\text{Energie:} \quad E = hf = \hbar \omega \quad . \quad (7)$$

Geschwindigkeit

Wir haben uns die Geschwindigkeit von Materiewellen bis zum Schluss aufgehoben, ganz einfach deshalb, weil wir sie kaum benutzen werden. Allerdings lohnt es sich zu wissen, warum. Die bekannte Beziehung $v = \lambda f$ liefert korrekterweise die *Wellengeschwindigkeit*. Mithilfe der beiden Gleichungen (6) und (7) wird daraus

$$v_{\text{Welle}} = \lambda f = \frac{h}{p} \cdot \frac{E}{h} = \frac{E}{p} \quad (8)$$

Dies ist vielleicht die Geschwindigkeit eines *Teilchens*. Wir hatten gesehen, dass sich masselose Teilchen wie Photonen mit c bewegen, und ihre *Teilcheneigenschaften* E und p sind durch $E = pc$ miteinander verbunden. Die obige Beziehung bestätigt, dass sich auch elektromagnetische *Wellen* mit c ausbreiten. Auch *Materiewellen* würden sich mit c bewegen, wenn $E = pc$ auch für Teilchen mit Masse gelten würde – aber das ist nicht der Fall. Sie sollten sich aber zumindest mit der *Teilchengeschwindigkeit* bewegen, sofern E gleich pv_{Teilchen} ist. Doch auch das ist nicht der Fall.

Wellen- und Teilchengeschwindigkeit, die auch als Phasen- und Gruppengeschwindigkeit bezeichnet werden, werden wir später noch genauer diskutieren. Wesentlich ist hier, dass die Formel $v = \lambda f$ für massebehaftete Teilchen nur von geringem Nutzen ist, da v weder die Geschwindigkeit des Teilchens noch die Lichtgeschwindigkeit ist. Die üblichen Beziehungen zwischen den reinen Teilcheneigenschaften ($p = mv$, $E_{\text{kin}} = \frac{mv^2}{2}$, etc.) sind in Ordnung, und die Gleichungen (6) und (7) gelten universell. Bei Teilchen mit Masse ist aber E weder $\frac{hc}{\lambda}$ noch $\frac{hv_{\text{Teilchen}}}{\lambda}$. Zudem ist p weder gleich $\frac{hf}{c}$ noch $\frac{hf}{v_{\text{Teilchen}}}$.

Quellenangabe

Obige Ausführungen entstammen in Teilen den Abschnitten 3.6, 4.1 und 4.2 aus dem Buch:

Harris, Randy: *Moderne Physik*, Lehr- und Übungsbuch (2. Aufl.), Pearson (München 2013).

Die Inhalte wurden einerseits marginal ergänzt, um die verständliche Lektüre auf gymnasialem Niveau zu unterstützen, und andererseits wurden eigene Erläuterungen eingefügt, sodass der Text gut an das bereits erarbeitete Vorwissen anknüpft.