Das Zwillingsparadoxon

Vorstellung des Paradoxons

Gegeben seien zwei Zwillinge A und B. Während A auf der Erde bleibt, macht B eine Reise mit relativistischer Geschwindigkeit zu einem Stern und kehrt anschliessend zur Erde zurück. Im Bezugssystem von A unterliegt B der Zeitdilatation, altert also weniger schnell und kommt jünger als A zur Erde zurück. Im Bezugssystem von B unterliegt A der Zeitdilatation, sodass beim Wiedersehen A der jüngere sein müsste. B scheint also nach seiner Reise sowohl jünger, als auch älter als A zu sein – ein typisches Paradoxon!

Auflösung des Paradoxons in Kürze

Die Lebensgeschichten von A und B sind nicht symmetrisch! A verweilt die ganze Zeit in einem Inertialsystem, nämlich auf der Erde, während B's Reise vier Beschleunigungsphasen enthält: Abflug von der Erde, Ankunft beim Stern, Abflug zur Rückreise, Ankunft bei der Erde. A lebt also in einem besonderen Inertialsystem, welches sich gegenüber B dadurch auszeichnet, dass es immer ein Inertialsystem ist. Die scheinbare Symmetrie zwischen A und B ist gebrochen.

Es wird sich zeigen, dass B jünger zurückkehrt, doch das ist paradox genug. Es handelt sich dann aber streng genommen nicht mehr um ein Paradoxon (= eine scheinbar zugleich wahre und falsche Aussage), sondern nur noch um eine Paradoxie (= etwas dem Geglaubten, Gemeinten, Erwarteten Zuwiderlaufendes). Es soll aber an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, dass sich in der relativistischen Literatur der Begriff Zwillingsparadoxon eingebürgert hat.

Beschleunigungen haben einen absoluten Charakter

Nun könnte man aber das Argument vorbringen, dass im Bezugssystem des reisenden Zwillings B der auf der Erde verbleibende Zwilling A vier Beschleunigungsphasen hat, womit die Symmetrie zwischen A und B wiederhergestellt wäre. Dieser Einwand wäre ganz falsch! Beschleunigungen sind nicht relativ! Ob ein Körper eine Beschleunigung erfährt oder nicht, lässt sich absolut, also für alle Bezugssysteme verbindlich, feststellen. Der beschleunigte Körper erfährt nämlich Trägheitskräfte, der nicht-beschleunigte nicht. Dies bedeutet für die Zwillinge Folgendes: Zwilling B wird während der beiden Startphasen in den Sitz des Raumschiffs gedrückt und muss während der beiden Bremsphasen Gurten anlegen, um nicht gegen das Armaturenbrett geschleudert zu werden. Zwilling A erfährt von alledem nichts. Also sind Beschleunigungen nicht relativ wie geradlinig-gleichförmige Bewegungen.

Ein Zahlenbeispiel

Das Reiseziel soll $8\,\mathrm{LJ}$ entfernt liegen und die Reisegeschwindigkeit soll $\beta = 0.8$ ($\Rightarrow \gamma = \frac{5}{3}$) betragen. Die vier Beschleunigungsphasen sollen sehr kurz sein, sodass sie die Rechnung nicht unnötig verkomplizieren.

Die Abreise findet im Jahre 2030 statt. Für A dauert B's Hin- und Rückreise jeweils 10 Jahre:

$$\Delta t_{\mathrm{A}} = \frac{8\,\mathrm{LJ}}{0.8\,c} = 10\,\mathrm{J}$$

B kommt also im Jahre 2050 zurück. Dem Zwilling B fliegt das Reiseziel mit $\beta = -0.8$ entgegen. Die Entfernung Erde-Stern unterliegt für B daher der Längenkontraktion und wird von $8\,\mathrm{LJ}$ auf

$$\frac{8\,\mathrm{LJ}}{\gamma} = \frac{8\,\mathrm{LJ}}{\frac{5}{3}} = 8\,\mathrm{LJ} \cdot \frac{3}{5} = 4.8\,\mathrm{LJ}$$

verkürzt. Die Hinreise dauert für B also nur 6 Jahre:

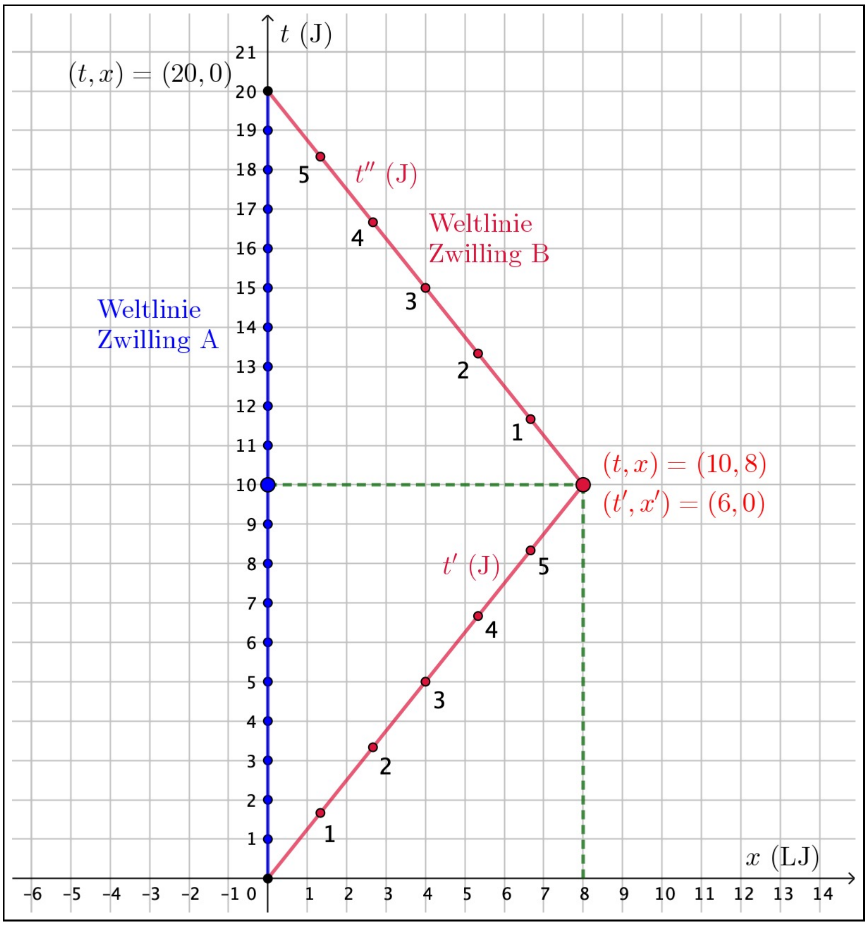
$$\Delta t_{\mathrm{B}} = \frac{4.8\,\mathrm{LJ}}{0.8\,c} = 6\,\mathrm{J}$$

B kommt folglich im Jahre 2036 seiner Zählung beim Stern an und kehrt im Jahr 2042 zur Erde zurück. Offensichtlich ist B um 8 Jahre weniger gealtert als A.

Wie interpretiert nun A dieses Phänomen? Für A ist die Entfernung Erde-Stern nicht der Längenkontraktion, B aber der Zeitdilatation unterworfen. Also vergehen in 10 Jahren Erdzeit bei B nur

$$\Delta t_{\mathrm{B}} = \frac{10\,\mathrm{J}}{\gamma} = \frac{10\,\mathrm{J}}{\frac{5}{3}} = 10\,\mathrm{J} \cdot \frac{3}{5} = 6\,\mathrm{J}$$

Hier das zugehörige Minkowski-Diagramm, allerdings ohne die x'- resp. x''-Achse:



Das symmetrische Zwillingsparadoxon

Wir haben bereits überlegt, dass sich das Zwillingsparadoxon eindeutig auflösen lässt, weil die Situation zwischen den beiden Zwillingen A und B gar nicht wirklich symmetrisch ist. Nachweislich erfährt Zwilling B während seiner Reise Beschleunigungen, während dies für Zwilling A nicht der Fall ist. Somit sind wir auf der sicheren Seite anzunehmen, dass A andauernd im gleichen Inertialsystem bleibt und die Analyse in diesem System liefert ein eindeutiges Resultat: B bleibt jünger.

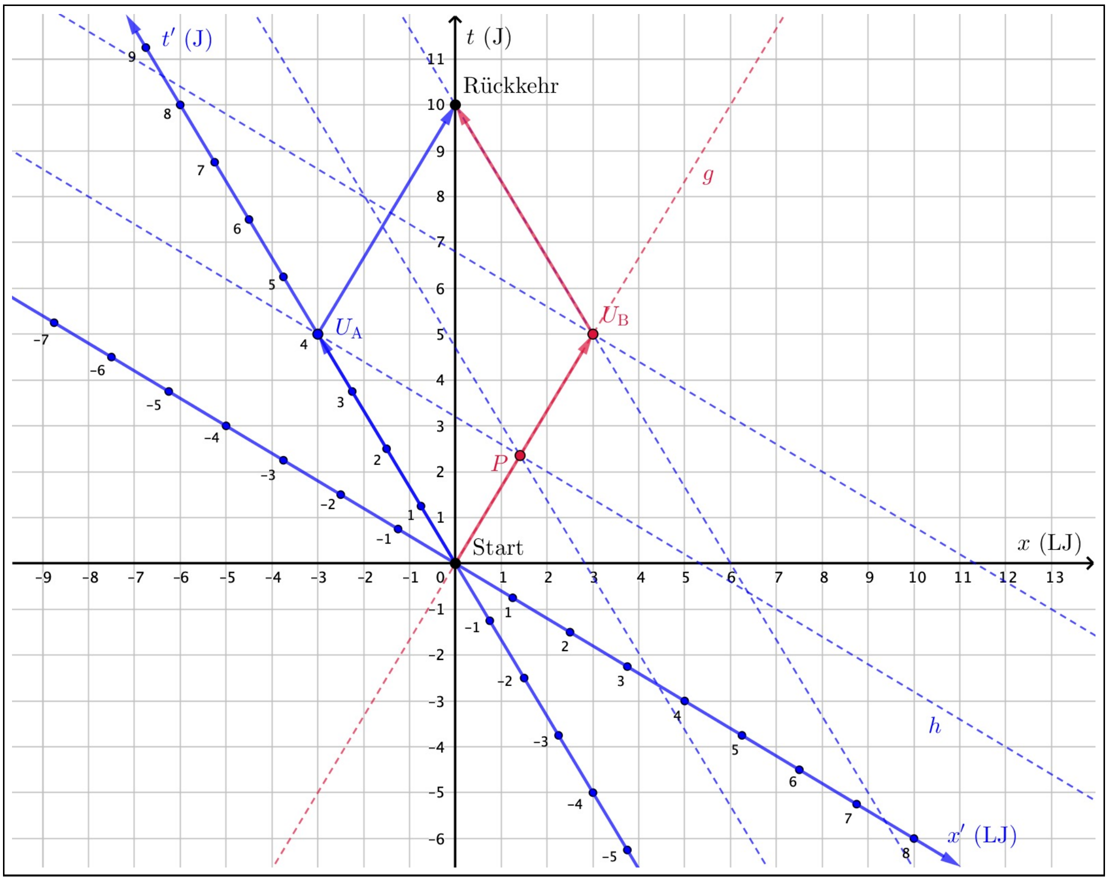
Nun wollen wir uns noch mit einer kniffligeren Analyse beschäftigen. Angenommen, beide Zwillinge A und B unternehmen genau symmetrische Ausflüge. A fliegt in die eine Richtung von der Erde weg, B in die entgegengesetzte. Beide haben im Erdsystem dieselben Geschwindigkeiten, kehren zum selben Zeitpunkt um und treffen somit auch wieder gleichzeitig bei der Erde ein. Aus Symmetriegründen müssen beide Zwillinge bei ihrer Rückkehr gleich alt sein, und zwar jünger als ein angenommener Drilling, der auf der Erde geblieben ist (dies haben wir ja bereits begriffen).

Wie versteht nun aber so ein Zwilling, dass der andere Zwilling bei der Rückkehr nicht jünger ist als er selber? Schliesslich ist der jeweils andere Zwilling stets bewegt und somit der Zeitdilatation unterworfen. Wo wird diese Paradoxie aufgelöst?

Ein konkretes Zahlenbeispiel zum symmetrischen Zwillingsparadoxon

Ich nehme an, Zwilling A verlässt die Erde im Erdsystem mit einer Geschwindigkeit von $\beta = -0.6$. Entsprechend beträgt die Geschwindigkeit von Zwilling B, der zur gleichen Zeit startet, im Erdsystem $\beta_{\mathrm{B}} = 0.6$. Beide fliegen während 5 Jahren im Erdsystem von der Erde weg, kehren dann schlagartig um und fliegen gleich schnell wieder zurück zur Erde, wo sie nach insgesamt 10 Jahren auf der Erde vergangener Zeit wieder eintreffen.

Wiederum wollen wir davon ausgehen, dass sämtliche Beschleunigungs- und Bremsphasen im Vergleich zu den Flugphasen so kurz sind, dass wir sie in der Betrachtung vernachlässigen dürfen. Dann sieht das Minkowski-Diagramm dazu folgendermassen aus:



U_{A} und U_{B} sind die Umkehrpunkte von A und B. Sie ereignen sich im Erdsystem bei $t = 5\,\mathrm{J}$ und Entfernungen von $x = \pm 3\,\mathrm{LJ}$. Nach 10 Erdjahren sind beide Zwillinge zurück.

Zusätzlich eingetragen ist das Bezugssystem von Zwilling A während dem Wegflug von der Erde. Ich nenne es das S'-System, während das Erdsystem das System S sein soll. Das System S' trage ich ein, weil uns ja interessiert, wie sich die Reise von Zwilling B im System von Zwilling A darstellt.

Bedeutung und Koordinaten des Punktes P

Wir bemerken nun, dass die Betrachtung der Reise von Zwilling B im System S' nur bis zum Punkt P sinnvoll ist. Danach kehrt Zwilling A nämlich bereits um und wechselt somit sein Inertialsystem.

Für die weitere Behandlung werden sich die Koordinaten von P als nützlich erweisen, weshalb wir sie hier kurz berechnen wollen. Im S-System ergibt sich P als Schnittpunkt der beiden Geraden g und h. Diese sind gegeben durch ($\beta = 0.6 = \frac{3}{5}$, $\gamma = \frac{5}{4}$):

$$g(x) = \frac{1}{\beta} \cdot x = \frac{5}{3}\,x \quad \text{und} \quad h(x) = -\beta \cdot \big(x - x(U_{\mathrm{A}})\big) + y(U_{\mathrm{A}}) = -\frac{3}{5} \cdot (x+3) + 5 = -\frac{3}{5}\,x + \frac{16}{5}$$

Für den Schnittpunkt P im Erdsystem S folgt daraus: $(t, x) = (\frac{40}{17}, \frac{24}{17}) \approx (2.35, 1.41)$.

Aus der Lorentztransformation mit $\beta = -\frac{3}{5}$ folgt für die Koordinaten von P im S'-System: $(t', x') = (4, \frac{60}{17}) \approx (4, 3.53)$. Dass die Zeitkoordinate genau $t' = 4$ beträgt, überrascht uns nicht, denn der Punkt wurde ja so konstruiert, dass er im S'-System genau dieselbe Zeitkoordinate wie der Umkehrpunkt U_{A} hat. Die Koordinate $x' \approx 3.53$ wird auf der x'-Achse bestätigt.

Der Umkehrpunkt U_{B} im S'-System

Weiter von Interesse sind die Koordinaten des Umkehrpunktes U_{B} im S'-System. Da wir die Koordinaten dieses Ereignisses im Erdsystem S kennen, $(t, x) = (5, 3)$, folgt aus der Lorentztransformation direkt: $(t', x') = (\frac{17}{2}, \frac{15}{2}) = (8.5, 7.5)$. Auch diese Koordinaten erkennen wir gut im S'-System.

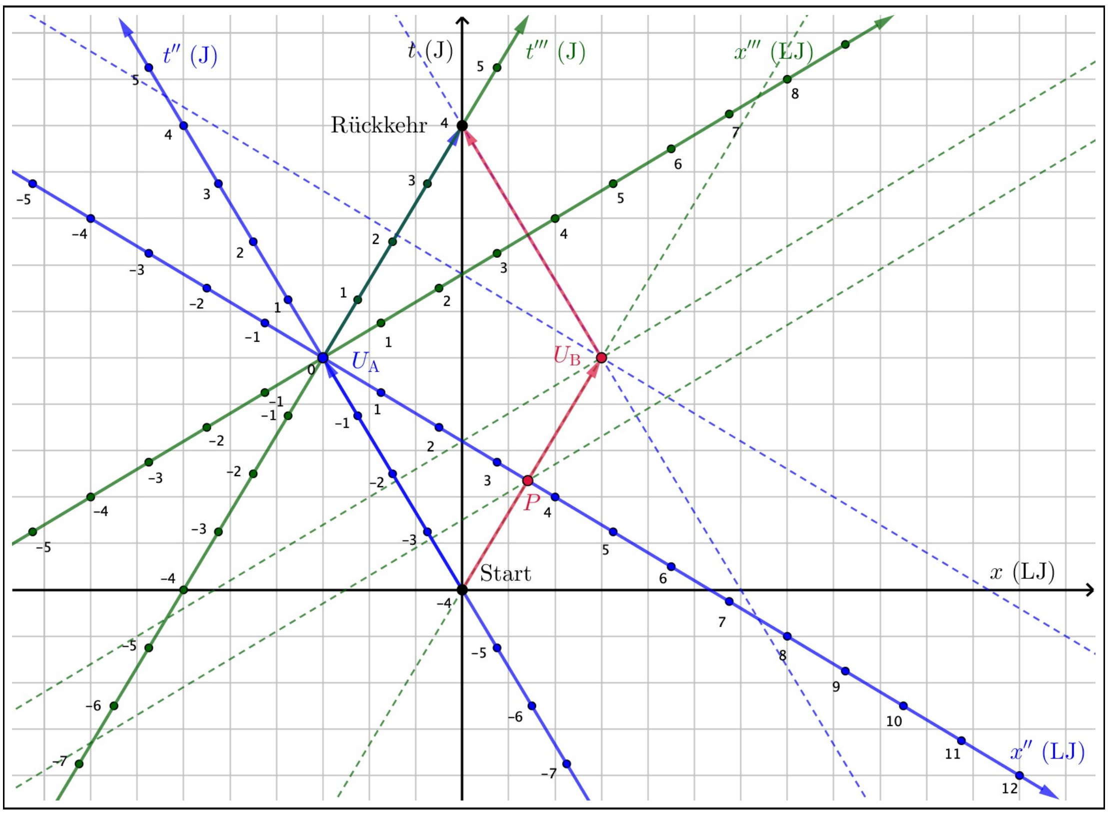
Das neue Bezugssystem S'' und ein neues Minkowski-Diagramm

Weiterhin möchten wir den Flug von Zwilling B im System von Zwilling A betrachten. Diese Betrachtung haben wir bis zum Umkehrpunkt U_{A} vollzogen. Für die weitere Untersuchung kreieren wir uns nun zuerst ein neues Bezugssystem S''. Sein Ursprung sitze im Umkehrpunkt des Zwillings A und seine Koordinatenachsen verlaufen parallel zu denjenigen von System S'. Eigentlich ist das neue System S'' bis auf die Lage des zeitlichen Nullpunktes identisch mit dem System S'. D.h., die Ortskoordinaten von Ereignissen sind in S'' dieselben wie in S', aber die Zeitkoordinaten aller Ereignisse sind nun um 4 Jahre reduziert. Somit kennen wir bereits die Koordinaten der Punkte P und U_{B} im neuen System S'':

$$P: \quad (t'', x'') = (t' - 4, x') = \left(4 - 4, \frac{60}{17}\right) = \left(0, \frac{60}{17}\right) \approx (0, 3.53)$$

$$U_{\text{B}}: \quad (t'', x'') = (t' - 4, x') = \left(\frac{17}{2} - 4, \frac{15}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, \frac{15}{2}\right) = (4.5, 7.5)$$

Betrachten wir dieses neue Koordinatensystem im Minkowski-Diagramm:



Die Idee hinter dem neuen System S''

Das S''-System ist blau eingefärbt. Es entspricht dem Inertialsystem, in dem sich Zwilling A unmittelbar vor der Umkehr im Ursprung U_A befindet. In diesem Ursprung ist der Zwilling A in seiner eigenen Wahrnehmung 4 Jahre älter als bei seinem Abflug von der Erde und auch Zwilling B, der sich zu diesem Zeitpunkt aus der Sicht von A im Punkt P befindet hat in der Sichtweise von A eine Reisezeit von 4 Jahren seit dem Abflug von der Erde hinter sich. D.h., wir starten ab diesem neuen Ursprung U_A in gewisser Weise eine neue Zeitrechnung, wobei wir sorgfältig darauf geachtet haben, dass A und B aus der Sicht des Zwillings A bis hierhin gleich viel Reisezeit hinter sich haben.

Die Umkehr von A – nochmals ein neues Bezugssystem S'''

Im neuen Ursprung U_A kehrt der Zwilling A um. Dort wechselt er also sein Inertialsystem. Nach der Umkehr wird A die Welt aus dem neuen Bezugssystem S''' (grün) betrachten! Die Zeitachse t''' entspricht der Weltlinie des Zwillings A und führt direkt zum Ereignis "Rückkehr auf die Erde" – innerhalb einer Zeitspanne von 4 Jahren für Zwilling A.

Da S'' und S''' Inertialsysteme sind und wir dafür gesorgt haben, dass ihre Nullpunkte zusammenfallen, können wir die Ereignisse P und U_B mittels Lorentztransformation ins neue System S''' umrechnen. Allerdings müssen wir dazu wissen, mit welcher Geschwindigkeit sich S''' relativ zu S'' bewegt. Das ist aber rasch ermittelt. Die relativistische Geschwindigkeitsaddition liefert die notwendige Information.

Im System S' bewegt sich die Erde mit der Geschwindigkeit $v = 0.6c$ nach rechts. Im Erdsystem bewegt sich aber auch der Zwilling A nach seiner Umkehr mit der Geschwindigkeit $u' = 0.6c$ nach rechts. Folglich ergibt sich für die Geschwindigkeit u des Systems S''' (= System des Zwillings A nach der Umkehr) aus der Sicht von System S'' (= System des Zwillings A vor der Umkehr):

$$u = \frac{v+u'}{1+\frac{v\cdot u'}{c^2}} = \frac{0.6c+0.6c}{1+\frac{0.6c\cdot 0.6c}{c^2}} = \frac{1.2c}{1+0.36} = \frac{15}{17}c \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{15}{17}$$

Damit rechnen wir die Koordinaten von P und U_B ins S'''-System um. Wir erhalten mit $\beta = \frac{15}{17}$ und daraus folgend mit $\gamma = \frac{17}{8}$:

$$P: \quad (t''', x''') = \left(-\frac{225}{34}, \frac{15}{2}\right) \approx (-6.62, 7.5)$$

$$U_\mathrm{B}: \quad (t''', x''') = \left(-\frac{9}{2}, \frac{15}{2}\right) = (-4.5, 7.5)$$

Genau diese Werte finden wir effektiv für die Ereignisse P und U_B auf den grünen Koordinaten-Achsen des S'''-Systems, was unsere Rechnung bestätigt.

Die Auflösung des symmetrischen Zwillingsparadoxons

Aber Moment, was ist nun bei diesem Wechsel des Zwillings A vom Bezugssystem S'' ins System S''' mit den Koordinaten von P passiert?! Schauen wir nochmals genau hin:

$$P: \quad (t'', x'') = \left(0, \frac{60}{17}\right) \approx (0, 3.53) \qquad \text{und} \qquad (t''', x''') = \left(-\frac{225}{34}, \frac{15}{2}\right) \approx (-6.62, 7.5)$$

Der Punkt P ist plötzlich über sechseinhalb Jahre in die Vergangenheit zurückgefallen! Das bedeutet, aus der Sicht von A hat der Zwilling B auf einmal deutlich mehr Zeit für den letzten Teil der Reise erhalten. Das kompensiert dann genau, dass seine Uhr langsamer läuft, sie läuft einfach länger!

Das Verstreichen der Zeit von Zwilling B aus der Sicht von Zwilling A

Wir wollen nun zum Schluss alles zusammentragen Abschnitt für Abschnitt sagen, wie die Zeit des Zwillings B aus der Sicht von Zwilling A verstreicht.

Erster Abschnitt $\mathbf{Start} \to \boldsymbol{P}$: Im Eigensystem von Zwilling A vergehen genau 4 Jahre. Aus seiner Sicht bewegt sich der Zwilling B während dieser Zeitspanne mit $u = \frac{15}{17}\,c$, woraus wir mit dem zugehörigen $\gamma = \frac{17}{8}$ aufgrund der Zeitdilatation für die Zeit auf der Uhr von B folgern:

$$\Delta t_{\mathrm{B},1} = \frac{\Delta t_{\mathrm{A},1}}{\gamma} = \frac{4\,\mathrm{J}}{\frac{17}{8}} = \frac{32}{17}\,\mathrm{J} \approx 1.88\,\mathrm{J}$$

Zweiter Abschnitt $\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{U}_{\mathbf{B}}$: In diesem Abschnitt bewegen sich die beiden Zwillinge aus der Optik von A parallel zueinander. Sie befinden sich im selben Inertialsystem. Ihre Uhren laufen gleich schnell. Aus den Koordinaten von P und U_B folgern wir für die dabei verstreichende Zeitspanne:

$$\Delta t_{\mathrm{B},2} = \Delta t_{\mathrm{A},2} = t'''_{U_\mathrm{B}} - t'''_P = -\frac{9}{2}\,\mathrm{J} - \left(-\frac{225}{34}\,\mathrm{J}\right) = \frac{-153+225}{34}\,\mathrm{J} = \frac{72}{34}\,\mathrm{J} = \frac{36}{17}\,\mathrm{J} \approx 2.12\,\mathrm{J}$$

Dritter Abschnitt $\boldsymbol{U}_{\mathbf{B}} \to \mathbf{Rückkehr}$: Für diese letzte Etappe stehen dem Zwilling B im System von Zwilling A nun ganze $8.5 = \frac{17}{2}$ Jahre zur Verfügung, nämlich die Zeitspanne zwischen $t'''_{U_\mathrm{B}} = -\frac{9}{2}\,\mathrm{J}$ und der Rückkehr bei $t'''_\mathrm{R} = 4\,\mathrm{J}$. Zwilling B bewegt sich nun mit einer Relativgeschwindigkeit von $u = -\frac{15}{17}\,c$, sodass bei der Zeitberechnung der für B verstreichenden Zeitspanne wieder der Faktor $\gamma = \frac{17}{8}$ verwendet wird:

$$\Delta t_{\mathrm{B},3} = \frac{\Delta t_{\mathrm{A},3}}{\gamma} = \frac{\frac{17}{2}\,\mathrm{J}}{\frac{17}{8}} = 4\,\mathrm{J}$$

Nun können wir die Zeiten auf den drei Abschnitten aufsummieren:

$$\Delta t_{\mathrm{B},1} + \Delta t_{\mathrm{B},2} + \Delta t_{\mathrm{B},3} = \frac{32}{17}\,\mathrm{J} + \frac{36}{17}\,\mathrm{J} + 4\,\mathrm{J} = 8\,\mathrm{J}$$

Tatsächlich vergehen also auch aus der Sicht von Zwilling A für den Zwilling B insgesamt 8 Jahre Zeit. Trotz Zeitdilatation kann er dies nachvollziehen. Und nochmals: Der Grund dafür liegt im Wechsel des Bezugssystems bei der Umkehr. Dort wird aus Sicht von A der Umkehrpunkt U_B von der Zukunft in die Vergangenheit zurückversetzt, sodass B's Uhr durchaus langsamer laufen darf, denn sie hat nun mehr Zeit zur Verfügung, um total 8 Jahre zu erreichen.

Übrigens kann Zwilling A auf diese Weise zu jedem beliebigen Zeitpunkt nachvollziehen, wie viel Zeit auf der Uhr von Zwilling B gerade angezeigt wird. Z.B. können wir obigen Berechnungen auch entnehmen, dass im Umkehrpunkt U_B auf B's Uhr genau vier Jahre vergangen sind, was ja eben genau so sein muss:

$$\Delta t_{\mathrm{B},1} + \Delta t_{\mathrm{B},2} = \frac{32}{17}\,\mathrm{J} + \frac{36}{17}\,\mathrm{J} = \frac{68}{17}\,\mathrm{J} = 4\,\mathrm{J}$$