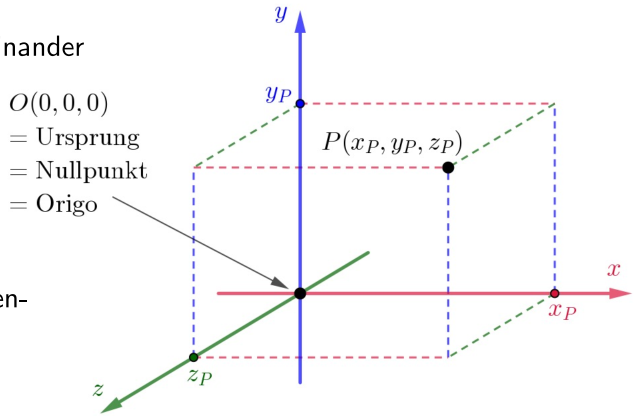
Inertialsysteme, Galilei-Transformation und Relativitätsprinzip

1 Vom Koordinatensystem zum Inertialsystem

i. **In der Mathematik:** Dreidimensionales Koordinatensystem = drei senkrecht zueinander stehende **Koordinatenachsen** (je ein Zahlenstrahl von $-\infty$ bis $+\infty$) $\rightarrow$ $\boldsymbol{x}$-, $\boldsymbol{y}$- und $\boldsymbol{z}$-**Achse**.

   Zu jedem Punkt P gehört ein Koordinatentripel (x_P, y_P, z_P).



ii. **In der Realität:** Lege ein 3D-Koordinatensystem in den Raum $\Rightarrow$ Angabe des **Aufenthaltsortes** eines Objektes durch Koordinatentripel (x, y, z).

iii. **Bemerke:** Real kann eine Ortsangabe immer nur **relativ** zu anderen Objekten erfolgen!

   $\Rightarrow$ "befestige" das Koordinatensystem an einem Objekt! So wird das Koordinatensystem zu einem **Bezugssystem**, weil die Ortsangaben (x, y, z) der weiteren Objekte sich nun auf dieses erste Objekt "beziehen", also relativ zu diesem **Bezugsobjekt** angegeben werden. Das Bezugsobjekt selber ruht in seinem eigenen Bezugssystem.

   Beispiel: *Ich betrachte die Schienen als ruhend, d.h., ich deklariere ein Bezugssystem, in dem die Schienen ruhen und ein Zug sich bewegt. Dieses Bezugssystem bezeichne ich kurz als* **Schienensystem**. *Umgekehrt ruht der Zug im* **Zugsystem** *und die Schienen bewegen sich, wenn der Zug "fährt" – allerdings in die andere Richtung...*

iv. **Zeit** t = zusätzliche Dimension/Koordinatenachse. **Gehört ebenfalls zum Bezugssystem!**

   $\Rightarrow$ zur Beschreibung von Bewegungsabläufen benötigen wir ein **vierdimensionales** Bezugssystem mit 1 Zeit- und 3 Ortsachsen.

v. Ein **Ereignis** E ist ein Punkt im 4D-Bezugssystem. Es findet zur Zeit t am Ort (x, y, z) statt, hat also 1 Zeit- und 3 Raumkoordinaten. Häufige Notation: $E(t, x, y, z)$.

   $\Rightarrow$ Ereignis: "Was? Wann? Wo?"

   Beispiel: *Am Sechseläuten vom 8.4.2019 explodierte der Kopf des Böögs um 18:17:44 Uhr in der Mitte des Sechseläutenplatzes auf einer Höhe von 12.7 Metern über Boden.*

vi. **Wir halten fest:** Zur **vollständigen Deklaration eines Bezugssytems** gehören:

   - Angabe des **Bezugsobjektes**.
   - Festlegung des **Ursprungs** $O(0, 0, 0, 0)$. Dabei ist der Ortsnullpunkt $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ oftmals der Bezugskörper selber oder eine Stelle an ihm. Der zeitliche Ursprung $t = 0$ ist der Moment, in dem die "Stoppuhr" gestartet wird.

     Man kann auch sagen: Die Festlegung des Ursprungs entspricht der Angabe eines Ereignisses, das die Koordinaten $(0, 0, 0, 0)$ erhalten soll.

     Die Wahl des Ursprungs ist grundsätzlich frei!
   - Festlegung der **Achsenblickrichtungen**.

vii. Das **Trägheitsprinzip (1. Newton'sches Axiom)** lautet:

> **Lex prima.** *Jeder Körper beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.*

Dieses Trägheitsprinzip gilt **nicht** in jedem beliebigen Bezugssystem!

Beispiel: *In einem zunächst ruhenden Auto befinde sich eine in Fahrtrichtung aufgestellte Luftkissenbahn. Offensichtlich gilt das Trägheitsprinzip, denn während der Schlitten* **ruht** *(gleichförmige Bewegung mit Geschwindigkeit $v = 0$), herrscht ein* **Kräftegleichgewicht** *zwischen der Tragkraft des Luftkissens und der Gewichtskraft des Schlittens.*

Nun beschleunige das Auto. Da der Schlitten reibungsfrei auf dem Luftkissen gelagert ist, ändert sich nichts an seiner Kräftesituation. Er bleibt in einem Kräftegleichgewicht. Dennoch beschleunigt er im Autosystem nach hinten (wie die Strasse). Im System des beschleunigenden Autos ist also das Trägheitsprinzip nicht mehr gültig!

Ein Beobachter im Autosystem (= beschleunigtes Bezugssystem) könnte nun auf die Idee kommen, die Beschleunigung des Schlittens auf die Existenz einer nach hinten wirkenden Kraft zurückzuführen, obwohl er eigentlich nur die Auswirkung der Trägheit des Schlittens beobachtet. Derartige "Trägheitskräfte" in beschleunigten Bezugssystemen bezeichnen wir als **Scheinkräfte***.*

viii. Das Trägheitsprinzip muss somit als **Definition einer speziellen Art von Bezugssystem** aufgefasst werden: Ein **Inertialsystem** ist ein Bezugssystem, in dem das Trägheitsprinzip gilt!

Inertialsystem (= nicht-beschleunigtes Bezugssystem)	**vs.**	**Beschleunigtes Bezugssystem**
• Bezugskörper selber kräftefrei		• Bezugskörper nicht kräftefrei
• **Trägheitsprinzip erfüllt**		• **Trägheitsprinzip verletzt**
• es gibt nur Kräfte mit klar benennbarer, vom Bezugssystem unabhängiger Ursache		• Beschleunigung kann als Auswirkung sog. **Scheinkräfte** verstanden werden, (von der Wahl des Systems abhängig)
• **Aktionsprinzip anwendbar**		• **Aktionsprinzip nicht anwendbar** (ausser mit Scheinkräften)

Inertialsysteme heissen so, weil der Bezugskörper eine Trägheitsbewegung ausführt, also gemäss dem Trägheitsprinzip selber kräftefrei ist (lat. *inertia* = Trägheit).

2 Galilei-Transformation = Koordinatenumrechnung zwischen zwei Inertialsystemen in der Newton'schen Mechanik

i. **Es gibt unendlich viele Inertialsysteme. Relativ zueinander bewegen sie sich gleichförmig und geradlinig (und rotationsfrei).**

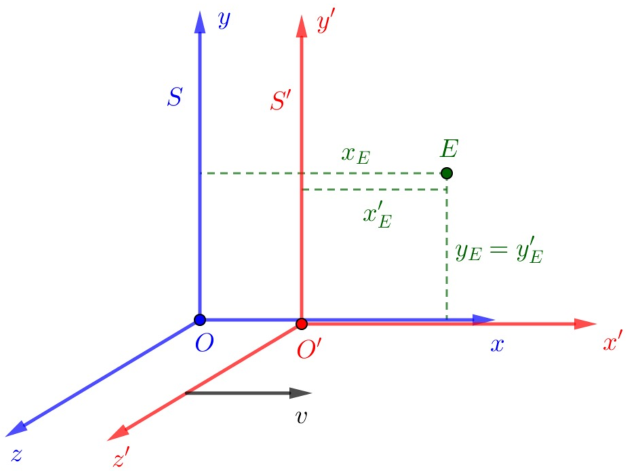
   Begründung: Ist das Trägheitsprinzip für ein Objekt in einem System erfüllt, so gilt es auch in einem anderen System, das sich relativ zum ersten System gleichförmig und geradlinig bewegt.

ii. **Frage:** Wie rechnet man Ereignisse und Bewegungen von Objekten vom einen in ein anderes Inertialsystem um? $\rightarrow$ **Koordinatentransformation? Geschwindigkeitstransformation?**

   Um die Sache nicht unnötig kompliziert zu machen, nutzen wir die Wahlfreiheiten bei der Festlegung der Intertialsysteme aus. Wir wählen Nullpunkte und Richtungen der Koordinatenachsen so, dass die Umrechnungen möglichst einfach werden!

   O.B.d.A.[1] legen wir für zwei Inertialsysteme S und S' eine **Standardorientierung** fest:

   - x-Achse und x'-Achse sind parallel zueinander. Ebenso y/y'-Achsen und z/z'-Achsen.
   - System S' bewegt sich im S-System mit der Geschwindigkeit v in die positive Richtung der x-Achse.
   - Die vierdimensionalen Nullpunkte der beiden Systeme fallen zusammen. D.h., zum Zeitpunkt $t = 0$ kommt der Ursprung O' des S'-Systems beim Ursprung O des S-Systems vorbei und die Uhr des S'-Systems zeigt die Zeit $t' = 0$.



iii. Zum Ereignis E gehören im S'-System die Koordinaten (t', x', y', z'). Wie lauten die Koordinaten (t, x, y, z) zum Ereignis E im S-System?

   - Da die Zeit in der Newton'schen Mechanik als **absolut** angenommen wird, also unabhängig vom Bezugssystem voranschreitet, muss $t' = t$ gelten, weil wir die zeitlichen Nullpunkte zusammengelegt haben.
   - Wegen der Parallelität der Achsen und der Bewegung von S' längs der x-Achse hat das Ereignis E in beiden Systemen dieselben y- und z-Koordinaten, also $y' = y$ und $z' = z$.
   - Das Ereignis E findet im S'-System zur Zeit t' statt. Bis dahin hat sich S' aus Sicht von S um die Strecke $v \cdot t$ verschoben. Folglich gilt für die x-Koordinate von E im S-System:

$$x = x' + v \cdot t \qquad \text{und umgekehrt:} \quad x' = x - v \cdot t$$

[1] O.B.d.A. = "Ohne Beschränkung der Allgemeinheit".

Damit haben wir vollständig bestimmt, wie die Koordinaten eines Ereignisses E beim Wechsel in ein anderes Inertialsystem ineinander umgerechnet werden. Diese Umrechnungsgleichungen der Newton'schen Mechanik werden als **Galilei-Transformation** bezeichnet. Es gilt also:

Galilei-Transformation $S \to S'$	**Galilei-Rücktransformation $S' \to S$**
$t' = t$	$t = t'$
$x' = x - v \cdot t$	$x = x' + v \cdot t'$
$y' = y$	$y = y'$
$z' = z$	$z = z'$

iv. **Geschwindigkeitstransformation:** Bewegt sich ein Objekt im S-System mit der Geschwindigkeit u' in die positive Richtung der x-Achse, so beträgt die Geschwindigkeit dieses Objekts im S'-System anschaulich $u = u' + v$. Zur Geschwindigkeit u' des Objektes in S' muss einfach noch die Geschwindigkeit des Systems S' selber addiert werden.

Wir halten somit für die **Geschwindigkeitstransformation** der Newton'schen Mechanik fest:

Geschwindigkeitsaddition: $\quad u = u' + v \quad$ und umgekehrt: $\quad u' = u - v$

3 Das Relativitätsprinzip

i. **Beschleunigungstransformation?** Ein Objekt bewege sich im Inertialsystem S' aktuell mit der Geschwindigkeit u' und erfahre eine Beschleunigung a'. Welche Beschleunigung a erfährt das Objekt im Inertialsystem S? Anders gefragt: Wie transformieren sich Beschleunigungen?

Antwort: Beschleunigung ist definiert als Geschwindigkeitsänderung pro Zeitspanne: $a = \frac{\Delta u}{\Delta t}$ resp. $a' = \frac{\Delta u'}{\Delta t'}$. Nach der Zeitspanne $\Delta t'$ hat die Geschwindigkeit im S'-System um den Wert $\Delta u' = a' \cdot \Delta t'$ zugenommen. Die neue Geschwindigkeit beträgt also $u'_{\text{neu}} = u' + a' \cdot \Delta t'$. Über die Geschwindigkeitsaddition erhalten wir daraus für das S-System:

$$u_{\text{neu}} = v + u'_{\text{neu}} = \underbrace{v + u'}_{=u} + a' \cdot \Delta t' = u + a' \cdot \Delta t' \quad \Leftrightarrow \quad \Delta u = u_{\text{neu}} - u = a' \cdot \Delta t'$$

Schliesslich folgt für die Beschleunigung im S-System ($\Delta t' = \Delta t$):

$$a = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u_{\text{neu}} - u}{\Delta t} = \frac{a' \cdot \Delta t'}{\Delta t} = a'$$

Die Beschleunigung eines Objektes ist in allen Inertialsystemen dieselbe!

Wir sagen: **Die Beschleunigung ist invariant unter der Galilei-Transformation.**

ii. **Transformation von Kräften?** In der Newton'schen Mechanik entspricht es dem gesunden Menschenverstand anzunehmen, dass sich Kräfte beim Wechsel des Bezugssystems nicht transformieren. Damit ist auch die **resultierende Kraft** F_{res} auf ein Objekt in allen Bezugssystemen gleich gross.

Kräfte (inkl. resultierende Kraft F_{res}) sind invariant unter der Galilei-Transformation.

iii. **Folgerung für das Aktionsprinzip:** Nehmen wir die beiden Überlegungen aus i. und ii. zusammen, so folgt, dass das zweite Newton'sche Axiom in allen Inertialsystemen gleich lautet:

Gilt $\quad F'_{\text{res}} = m \cdot a' \quad$, dann auch $\quad F_{\text{res}} = m \cdot a \quad$, weil $\quad F'_{\text{res}} = F_{\text{res}} \quad$ und $\quad a' = a$

F_{res}, a (und m!) sind invariant unter Galilei-Transformation.

$\Rightarrow$ **Das Aktionsprinzip ist invariant unter Galilei-Transformation.**

iv. Aus obigen Überlegungen schloss bereits **Sir Isaac Newton** im 17. Jahrhundert auf das folgende grundlegende Prinzip, dem **Henri Poincaré** im Jahre 1904 den Namen **Relativitätsprinzip** gab und das **Albert Einstein** 1905 wie folgt formulierte:

> *"Die Gesetze, nach denen sich die Zustände der physikalischen Systeme ändern, sind unabhängig davon, auf welches von zwei relativ zueinander in gleichförmiger Bewegung befindlichen Koordinatensystemen diese Zustandsänderungen bezogen werden."*

Etwas moderner ausgedrückt wollen wir dieses Prinzip wie folgt festhalten:[2]

> **(Spezielles) Relativitätsprinzip**
>
> *Alle Inertialsysteme sollen physikalisch völlig gleichwertig sein. Keines soll sich durch irgendeine Eigenschaft von allen anderen hervorheben. Die physikalischen Gesetze sollen in allen Inertialsystemen dieselbe (mathematische) Form annehmen (Invarianz der physikalischen Gesetze).*

Das Modalverb *soll* drückt aus, dass diese Eigenschaft nur postuliert (= gefordert resp. verlangt) wird. Erst die Erfahrung, also das Experiment, wird die Richtigkeit dieser Forderung verifizieren.

Zusatzüberlegung: Unbestimmbarkeit eines absolut ruhenden Systems

Frage: Offenbar gibt es unendlich viele Inertialsysteme, die sich relativ zueinander gleichförmig und geradlinig bewegen. Welches davon ist denn absolut in Ruhe? Gibt es das überhaupt?

Antwort (Newton): Selbst wenn es ein absolut ruhendes Bezugssystem geben würde, so gibt es keinen (mechanischen) Versuch, mit dem man es aufspüren könnte, denn die physikalischen Grundgesetze (Newton'sche Axiome) gelten in allen Inertialsystemen gleich! D.h., in allen Inertialsystemen funktionieren die (mechanischen) Naturgesetze völlig identisch. Kein System zeichnet sich durch irgendeine Besonderheit aus.

$\Rightarrow$ **Es ist innerhalb der Newton'schen Mechanik prinzipiell unmöglich ein absolut ruhendes Bezugssystem aufzuspüren!**

Ergänzung: Dreidimensionalität und vektorielle Grössen

Bis dato haben wir die Transformationsgleichungen für Geschwindigkeiten, Beschleunigungen und Kräfte nur eindimensional aufgeschrieben. Unter Galilei-Transformation gilt aber ebenso dreidimensional resp. vektoriell:

Geschwindigkeitstransformation:	$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v}$ resp. $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$
Beschleunigungstransformation:	$\vec{a} = \vec{a}'$
Krafttransformation:	$\vec{F} = \vec{F}'$ insbesondere: $\vec{F}_{\text{res}} = \vec{F}'_{\text{res}}$
Aktionsprinzip:	$\vec{F}'_{\text{res}} = m \cdot \vec{a}'$ und $\vec{F}_{\text{res}} = m \cdot \vec{a}$

[2] Einstein formulierte ein paar Jahre später ein verallgemeinertes Relativitätsprinzip, dessen Aussage nicht mehr nur auf Inertialsysteme beschränkt bleibt. Ab diesem Moment musste das hier gezeigte Relativität als "spezielles" Relativitätsprinzip bezeichnet werden.