Minkowski-Diagramme – eine Einführung

Eine "alltägliche" Situation mit einem Raumschiff...

An der Erde fliege ein Raumschiff A mit $\beta = 0.6 = \frac{3}{5}$ vorbei. Es folgt:

$$\gamma =$$

- Bezugssystem S = Erdsystem (Erde bei $(x, y, z) = (0, 0, 0)$)
- Bezugssystem S' = System des Raumschiffs A (Raumschiff A bei $(x', y', z') = (0, 0, 0)$)

Die beiden Bezugssysteme S und S' seien in Standardorientierung (Bewegung von S' in S längs der x-Achse). Zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ sei das Raumschiff A auf Höhe der Erde, sodass für dieses Startereignis gilt:

$$(ct, x, y, z) = (ct', x', y', z') = (0, 0, 0, 0)$$

Die Ursprünge beider Bezugssysteme fallen also zusammen. Da für Ereignisse auf der Erde oder im Raumschiff $y = y' = 0$ und $z = z'$ gilt, brauchen wir dafür nur noch t und x anzugeben. Wir notieren dafür (x, t) resp. (x', t').

Eine neue Diagramm-Sorte: das Minkowski-Diagramm

Öffne das GeoGebra-File `Minkowski1.ggb`. Darin ist bereits ein Koordinatensystem sichtbar. Es sei das S-System (Erdsystem).

1. Im ersten Moment sieht das Diagramm fast wie ein altbekanntes t-s-Diagramm aus. Allerdings gibt es einen entscheidenden Unterschied. Welchen denn?

2. Ein solches Diagramm bezeichnen wir als **Minkowski-Diagramm**. Betrachte jetzt die Einheiten der beiden Achsen. Es handelt sich um Lichtsekunden (Ls) und Sekunden (s). Was ist schon wieder eine Lichtsekunde?

3. Wo befindet sich das Raumschiff A in diesem Diagramm nach einer Sekunde? Und bis wohin ist ein Lichtsignal bis zu diesem Zeitpunkt gekommen, das bei $(0, 0)$ ausgesendet wurde?

   Trage die entsprechenden Punkte im Diagramm ein.

4. Die Bewegungen des Raumschiffs A und des Lichtes sind im Erdsystem gleichförmig. Wie verlaufen demnach die Linien, die die Bewegungen dieser Objekte im Diagramm beschreiben ($\rightarrow$ eintragen!)?

   Man bezeichnet eine solche die Bewegung eines Objektes beschreibende Kurve in einem Minkowski-Diagramm als **Weltlinie** des Objektes.

5. Das Raumschiff A führt eine Uhr mit sich, die die aktuelle Zeit im System S' anzeigt. Wo liegt im Diagramm der Punkt, der zum **Ereignis $\boldsymbol{P}$:** *"Die Uhr im Raumschiff A zeigt den Wert* $1\,\mathrm{s}$*"* gehört?

   Tipp: Das Ereignis P hat im System des Raumschiffs A die Koordinaten $(x', t') = (0, 1\,\mathrm{s})$. Wie wär's mit einer Anwendung der Lorentzrücktransformation?

6. Die reale Distanz Erde-Mond beträgt etwa $380\,000\,\mathrm{km}$. Für unsere Betrachtungen reduzieren wir sie ein wenig und sagen, aus der Sicht der Erde sei der Mond gerade eine Lichtsekunde entfernt. Raumschiff A fliege fast exakt in Mondrichtung. D.h., der Ort des Mondes liege auf der x-Achse bei $1\,\mathrm{Ls}$.

   Zeichne die Weltlinie des Mondes ins Diagramm ein.

7. Wie weit ist der Mond zum Zeitpunkt $t' = 0$ aus der Sicht eines Reisenden im Raumschiff A entfernt?

   Tipp: Längenkontraktion der Distanz Erde-Mond im Erdsystem.

8. Wir betrachten das folgende **Ereignis $\boldsymbol{Q}$:** *"Raumschiff A fliegt am Mond vorbei"*.

   Markiere dieses Ereignis im Diagramm. Welcher Zeitpunkt gehört im Erdsystem dazu?

9. Welche Zeit zeigt die Borduhr von Raumschiff A für das Ereignis Q an?

   Tipp: Hier geht's um die Zeitdilatation des Resultates aus der vorangegangenen Aufgabe. Alternativ können wir auch mit der Lorentztransformation rechnen des Ereignisses Q rechnen.

10. Parallel zum Raumschiff A sei ein Raumschiff B unterwegs – ebenfalls mit $\beta = 0.6$. Aus der Sicht von Raumschiff A fliegt es eine Lichtsekunde voraus.

    Im Raumschiff B werde im System S von Raumschiff A zum Zeitpunkt $t' = 0$ ein Knopf gedrückt $\rightarrow$ **Ereignis $\boldsymbol{R}$**.

    Welche Koordinaten hat dieses Ereignis R im Erdsystem S?

    Tipp: Gesucht sind die ins S-System transformierten Koordinaten zu $(x', t') = (1\,\mathrm{Ls}, 0)$.

11. Trage zuerst das Ereignis R und danach die Weltlinie des Raumschiffs B ins Minkowski-Diagramm ein.

Ein zweites Koordinatensystem im selben Diagramm – die Genialität des Minkowski-Diagramms

Mit den Punkten resp. Ereignissen P und R aus den Fragestellungen 5 und 10 haben wir eigentlich die "Einheitspunkte" auf der Zeitachse t' und der Achse der Bewegungsrichtung x' im Bezugssystem S' betrachtet. Ohne Einheiten geschrieben sind nämlich:

$$P: \; (x', t') = (0, 1) \qquad \text{und} \qquad R: \; (x', t') = (1, 0)$$

Zusammen mit dem Ursprung $O : (x', t') = (0, 0)$ des S'-Systems, der mit dem Ursprung des S-Systems zusammenfällt, kennen wir somit alles, was nötig ist, um ein für das System des Raumschiffs A gültiges Koordinatensystem in unser Diagramm einzuzeichnen.

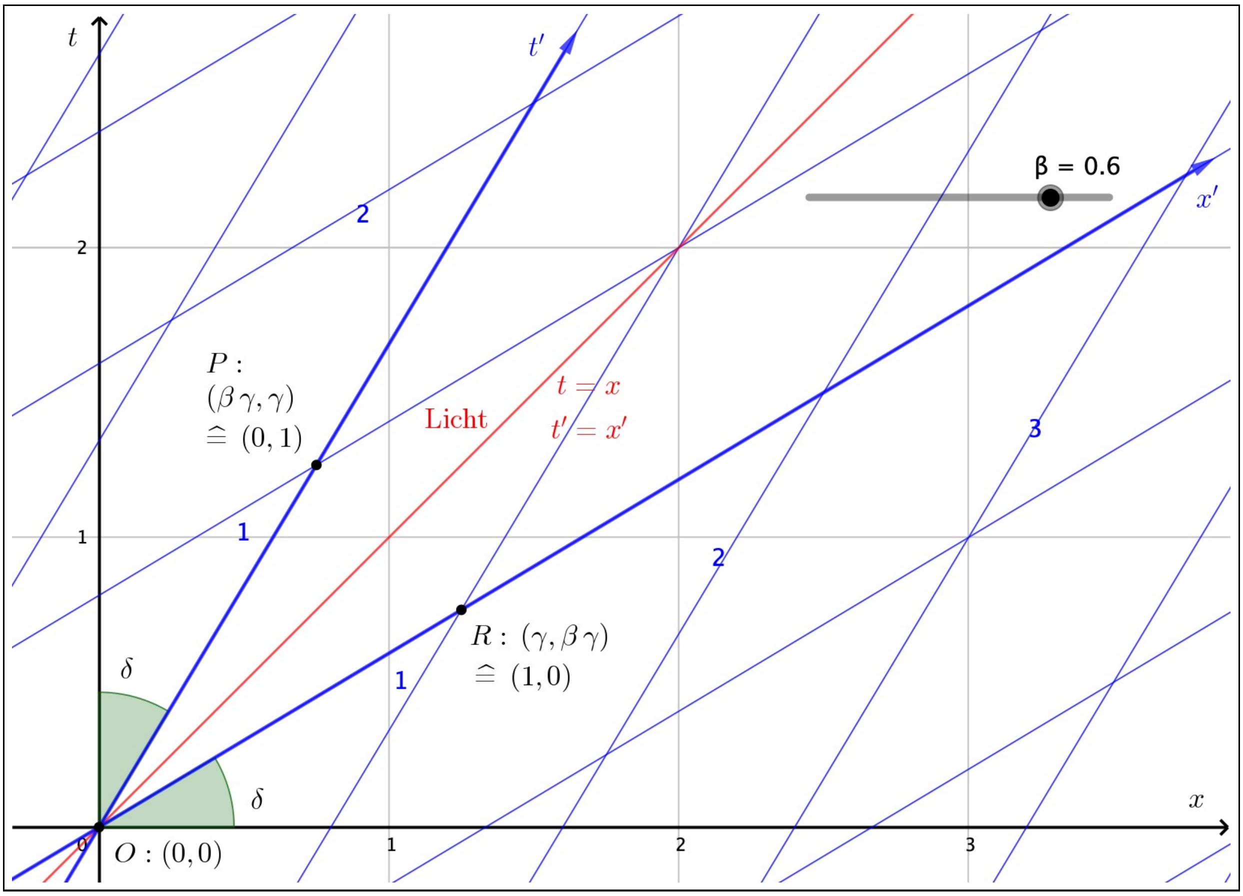
Erinnern wir uns zunächst an die Umrechnungen von P und R ins S-System (ohne Einheiten):

$$P: \; (x, t) = (\beta\gamma, \gamma) \qquad \text{und} \qquad R: \; (x, t) = (\gamma, \beta\gamma)$$

P gibt von O aus die Richtung der t'-Achse vor. Ebenso bestimmt R von O aus die Richtung der x'-Achse. P und R liegen symmetrisch zur Weltlinie des Lichts, die durch $t = x$ resp. $t' = x'$ gegeben ist. Der Winkel zwischen der t- und der t'-Achse ist derselbe wie zwischen der x- und der x'-Achse- Wir nennen ihn δ und finden mit den Koordinaten von P und R im S-System leicht:

$$\tan \delta = \frac{\beta\gamma}{\gamma} = \beta = \frac{v}{c}$$

Schauen wir uns das Minkowski-Diagramm mit diesen neuen Koordinatenachsen an:



Nochmalige Betrachtung unserer Ergebnisse im Diagramm mit 2 Koordinatensystemen

öffne jetzt das File `Minkowski2.ggb`. Darin findest du die grafischen Lösungen zu unseren vorigen Fragestellungen und neu eben auch das Koordinatensystem des Bezugssystems S' (= System Raumschiff A).

Im Folgenden wollen wir ein paar Dinge kommentieren, die nun deutlicher zum Vorschein kommen. Dabei beziehen wir uns auf einzelne der früheren Fragestellungen:

4. Wir sehen: Die Weltlinie des Raumschiffs A ist gerade die t'-Achse. Das ist genau richtig so, denn in seinem eigenen System ist das Raumschiff A in Ruhe, behält also stets die Ortskoordinate $x' = 0$.

5. Der Punkt P definiert die Zeitskala im S'-System, denn seine Koordinaten lauten dort $(x', t') = (0, 1)$.

   Im Erdsystem hatten wir für seine Koordinaten $(x, t) = (\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$ berechnet. Das passt bestens mit der Zeitdilatation zusammen, die nun auch direkt ersichtlich ist: Das Ereignis P liegt im S-System deutlich oberhalb des Zeitpunktes $t = 1$, nämlich bei $t = \frac{5}{4}$. D.h., im Raumschiff A ist bis zum Zeitpunkt $t = 1\,\mathrm{s}$ im S-System eben noch keine Sekunde vergangen.

7. Es wird deutlich, dass zum Zeitpunkt $t' = 0$ aus der Sicht eines Reisenden im Raumschiff A der Mond weniger als eine Lichtsekunde entfernt ist. Die Lichtsekundenentfernung ist ja mit dem Punkt R vorgegeben und die Weltlinie des Mondes schneidet die x'-Achse bereits vor diesem Punkt.

   Bei der Berechnung sind wir mittels Längenkontraktion auf $x' = \frac{4}{5}$ gekommen. Das passt auch optisch.

9. Im Erdsystem passiert das Raumschiff A den Mond zur Zeit $t = \frac{5}{3}$ (= Resultat von Aufgabe 8). Für den Zeitpunkt auf der Borduhr von Raumschiff A haben wir $t' = \frac{4}{3}$ berechnet, was graphisch bestätigt wird.

10. Nehmen wir an, die Uhren in Raumschiff A und Raumschiff B laufen synchron, so können wir das Ereignis zum Punkt R so beschreiben: *"Die Borduhr von Raumschiff B zeigt $t' = 0$ an."*

    Da die Distanz zwischen Raumschiff A und Raumschiff B im S'-System genau $1\,\mathrm{Ls}$ betragen soll, wird durch das Ereignis R die Längenskala auf der x'-Achse festgelegt (R hat im S'-System die Koordinaten $(x', t') = (1, 0)$).

    Die Längenkontraktion zu erkennen ist nun schon etwas anspruchsvoller. Betrachten wir die Situation im Erdsystem zum Zeitpunkt $t = 0$, so erlebt das Raumschiff B in diesem Moment nämlich gar nicht das Ereignis R. Vielmehr müssen wir schauen, wo das Raumschiff B zum Zeitpunkt $t = 0$ war. Und da finden wir es auf der x-Achse an einem Punkt, der deutlich weniger weit als eine Lichtsekunde entfernt ist. Dies ist die längenkontrahierte Eigendistanz zwischen den beiden Raumschiffen. Sie beträgt:

    $$d_{\mathrm{AB}} = \frac{d'_{\mathrm{AB}}}{\gamma} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$$

11. Die Weltlinie des Raumschiffs B entspricht gerade der ersten "vertikalen" Gitternetzlinie rechts der t'-Achse im S'-System.

Schlussbemerkung

Minkowski-Diagramme sind ungeheuer hilfreich um graphisch zu verstehen, "was passiert". Sie werden das Rechnen mit der Lorentztransformation nicht ersetzen, können aber bei der Veranschaulichung der Resultate extrem erhellend sein. Die Genialität des Minkowski-Diagramms liegt in der Tatsache, dass die Weltlinie eines Objektes beim Koordinatenwechsel dieselbe bleibt. Stattdessen wird um diese Weltlinie ein neues Koordinatensystem gelegt.