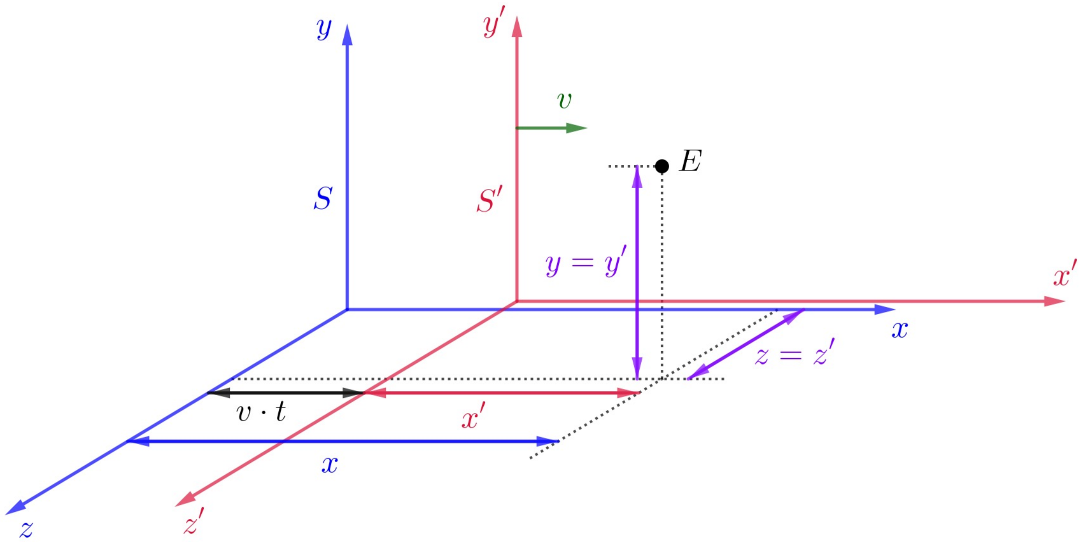
Die Herleitung der Lorentz-Transformation

Dieser Text entstammt bis auf leichte textliche, grafische und formale Anpassungen dem Buch:
J. Freund: *Spezielle Relativitätstheorie für Studienanfänger*, vdf (2007).

Altbekannt: Die Galilei-Transformation der klassischen Mechanik

Wir brauchen für die rechnerische Behandlung der Speziellen Relativitätstheorie häufig zwei inertiale Bezugssysteme: Das S-System mit den rechtwinkligen Koordinatenachsen x, y und z und der Zeitkoordinate t und das S'-System mit den rechtwinkligen Koordinatenachsen x', y' und z' und der Zeitkoordinate t'. Beide Systeme sind achsenparallel (d.h. die x-Achse ist parallel zur x'-Achse usw.) und S' bewegt sich aus Sicht des S-Systems mit der konstanten Geschwindigkeit v in die positive Richtung der x-Achse. Wenn beide Koordinatenursprünge zusammenfallen, setzen wir $t = t' = 0$.



Ein *Ereignis* E ist irgendein *Punkt im vierdimensionalen Raumzeit-Kontinuum*, gegeben durch vier Zahlenwerte für die Variablen x, y, z und t. Ein Ereignis kann sehr spektakulär sein, wie ein Supernovaausbruch, oder recht unspektakulär, wie unser Lesen dieser Zeilen hier und jetzt. Sind für das S-System der Koordinatenursprung ($x = y = z = 0$) und der Beginn der Zeitzählung ($t = 0$) erst einmal festgelegt und ist bekannt, mit welcher Geschwindigkeit v längs der x-Achse sich das S'-System relativ zum S-System bewegt, dann stellt sich die Frage, welche Raum- und Zeitkoordinaten x', y', z' und t' das Ereignis E im S'-System hat:

$$E(t, x, y, z) \qquad \longrightarrow \qquad E(t', x', y', z') \quad ?$$

Das Problem hört sich zunächst recht trivial an, da die Umrechnung zwischen x und x' durch $x' = x - vt$ gegeben zu sein scheint und die y-, die z- und die t-Koordinaten unverändert bleiben. Damit die t-Koordinate nicht "aus dem Rahmen fällt" und wie die anderen drei Koordinaten die Dimension einer Länge bekommt, wird sie mit der Lichtgeschwindigkeit c multipliziert.

Galilei-Transformation $S \rightarrow S'$ und -Rücktransformation $S' \rightarrow S$

= *Transformationen der Koordinaten eines Ereignisses zwischen zwei Inertialsystemen gemäss der klassischen (Newton'schen) Mechanik*

$$\begin{aligned} ct' &= ct \\ x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} ct &= ct' \\ x &= x' + vt' \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned} \tag{1}$$

Korrektur durch die Relativitätstheorie: die Lorentz-Transformation

Bei näherem Hinsehen wird aber klar, dass in der Galilei-Transformation ein Fehler gemacht wurde. Messungen von Längen in Richtung der Relativgeschwindigkeit v und Zeitmessungen können nicht einfach von einem System ins andere übernommen werden: Sie unterliegen der Längenkontraktion und der Zeitdilatation. Also gilt im S-System

$$\textit{nicht}\quad x' = x - vt \quad , \textit{sondern}\quad \frac{x'}{\gamma} = x - vt \quad ,$$

weil die im S'-System gemessene Länge x' im S-System auf $\frac{x'}{\gamma}$ kontrahiert wird. Also gilt im S-System

$$x' = \gamma\,(x - vt) \qquad \textit{bzw.} \qquad x' = \gamma\,(x - \beta ct) \tag{2}$$

Entsprechend im S'-System: Die Entfernung der beiden Koordinatenursprünge ist jetzt natürlich vt' und *nicht* vt. Wegen des Relativitätsprinzips hat die Relativgeschwindigkeit v allerdings in beiden Systemen den gleichen Betrag. Es gilt nun aber *nicht*

$$x' = x - vt' \quad ,$$

sondern

$$x' = \frac{x}{\gamma} - vt' \quad , \tag{3}$$

weil die im S-System gemessene Länge x im S'-System auf $\frac{x}{\gamma}$ kontrahiert wird.

Aus dem Gleichsetzen von x' in (2) und (3) folgt:

$$\begin{aligned}
& & \gamma\,(x - vt) &= \frac{x}{\gamma} - vt' && |\,\text{ausmultiplizieren}\\
&\Leftrightarrow & \gamma x - \gamma vt &= \frac{x}{\gamma} - vt' && |\,-\gamma x + \gamma vt + vt'\\
&\Leftrightarrow & vt' &= \gamma vt - \gamma x + \frac{x}{\gamma} && |\,\gamma\ \text{ausklammern}\\
&\Leftrightarrow & vt' &= \gamma\left(vt - x + \frac{x}{\gamma^2}\right) && |\,(-x)\ \text{ausklammern}\\
&\Leftrightarrow & vt' &= \gamma\left(vt - x\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)\right) && |\,1 - \frac{1}{\gamma^2} = \beta^2\\
&\Leftrightarrow & vt' &= \gamma\left(vt - \beta^2 x\right) && |\ :\beta\,,\ \text{d.h.}\ \cdot\frac{c}{v}\\
&\Leftrightarrow & ct' &= \gamma\,(ct - \beta x)
\end{aligned}$$

Da die Relativbewegung keine y- und keine z-Komponente hat, bleiben diese Komponenten unverändert. Zusammenfassend gilt also:

Lorentz-Transformation $S \rightarrow S'$

= *Transformation der Koordinaten eines Ereignisses zwischen zwei Inertialsystemen gemäss der Speziellen Relativitätstheorie*

$$\begin{aligned}
ct' &= \gamma\,(ct - \beta x)\\
x' &= \gamma\,(x - \beta ct)\\
y' &= y\\
z' &= z
\end{aligned} \tag{4}$$

Diese Gleichungen werden nach ihrem Entdecker *Lorentz-Transformation* genannt.

Die Lorentz-Transformation ist die relativistische Verallgemeinerung der Galilei-Transformation. Der revolutionäre Unterschied zur Galilei-Transformation besteht darin, dass die Zeit t im S-System nicht gleich der Zeit t' im S'-System ist. Die Zeit t' hängt vielmehr in ganz ähnlicher Weise von der Zeit t *und* von der Position x ab, wie auch die Position x' von x *und* t abhängt. Es taucht eine ganz neuartige *Symmetrie zwischen Zeit und Position (oder Raum)* auf.

Für Geschwindigkeiten, die sehr klein sind gegenüber der Lichtgeschwindigkeit, strebt β gegen 0 und γ gegen 1. Dann vereinfacht sich die Lorentz-Transformation, wie man sofort sieht, zur Galilei-Transformation. Die Frage, ab welcher Geschwindigkeit denn die Lorentz-Transformation angewandt werden muss, hängt natürlich mit der gewünschten Genauigkeit des Rechenergebnisses zusammen. Wie wir bereits gesehen haben, sind für die gegenwärtige Luft- und Raumfahrt, auch die interplanetare, die Geschwindigkeiten so gering, dass nicht-relativistische Rechnungen außerordentlich genaue Ergebnisse zeitigen.

Die Lorentz-Rücktransformation

Es bleibt noch die *Lorentz-Rücktransformation*, also die Berechnung der Koordinaten des S-Systems, wenn die Koordinaten eines Ereignisses im S'-System schon bekannt sind. Dazu denkt man sich das S-System mit dem S'-System vertauscht; dann bewegt sich das neue S-System mit der Geschwindigkeit $-v$ parallel zur x'-Achse. Mathematisch bedeutet dies, dass alle Variablen mit Strich durch solche ohne Strich ersetzt werden müssen und umgekehrt und dass v durch $-v$ ersetzt werden muss, also auch β durch $-\beta$. Der Lorentzfaktor γ bleibt wegen dem Quadrat von β in seiner Berechnung gleich. Hier das Resultat:

Lorentz-Rücktransformation $S' \to S$

$$\begin{aligned} ct &= \gamma\,(ct' + \beta x') \\ x &= \gamma\,(x' + \beta ct') \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned} \tag{5}$$

Überprüfung von Zeitdilatation und Längenkontraktion

Als *Konsistenztest* für die Lorentz-Transformation wollen wir die Zeitdilatation und die Längenkontraktion daraus wieder herleiten.

Vorbemerkung zu Zeitspannen: Bis anhin waren wir in unserer Notation von *Zeitspannen* etwas salopp. So haben wir dafür bei der Herleitung der Zeitdilatation einfach t resp. t' geschrieben – eine Schreibweise, die eigentlich für *Zeitpunkte*, also für die Zeitkoordinaten von Ereignissen reserviert wäre. Eine Zeitspanne ist per Definition eine Differenz zweier Zeitpunkte. Wir sollten also besser schreiben:

$$\text{Zeitspanne} \qquad \Delta t = t_2 - t_1$$

Dabei sind t_1 und t_2 die Zeitkoordinaten zweier Ereignisse.

Die Zeitdilatationsgleichung für zwei Ereignisse E_1 und E_2, die im System S' am selben Ort (x', y', z'), aber zu unterschiedlichen Zeiten t'_1 und t'_2 stattfinden, müsste somit wie folgt notiert werden:

$$\Delta t = \gamma\,\Delta t' \qquad \text{mit} \quad \Delta t = t_2 - t_1 \quad \text{und} \quad \Delta t' = t'_2 - t'_1 \tag{6}$$

Hier ist Δt die im S-System gemessene Zeitspanne zwischen den Ereignissen E_1 und E_2, zu denen in S die Zeitkoordinaten t_1 und t_2 gehören. Achtung! Im S-System finden E_1 und E_2 nicht mehr am selben Ort statt, denn schliesslich bewegt sich S' ja relativ zu S.

Zeidilatation: Am selben Ort (x', y', z') sollen im S'-System zu unterschiedlichen Zeiten t'_1 und t'_2 die beiden Ereignisse E_1 und E_2 geschehen. Welchen zeitlichen Abstand haben sie im S-System? Man nimmt zweimal die erste Zeile der Lorentz-Rücktransformation (5) – einmal für ct_1 und einmal für ct_2 – und subtrahiert diese voneinander:

$$\begin{aligned} c\,\Delta t = c(t_2 - t_1) = ct_2 - ct_1 &= \gamma\,(ct'_2 + \beta x') - \gamma\,(ct'_1 + \beta x') \\ &= \gamma\,(ct'_2 - ct'_1 + \beta x' - \beta x') = \gamma \cdot c\,(t'_2 - t'_1) = \gamma \cdot c\,\Delta t' \\ \Leftrightarrow \qquad \Delta t &= \gamma\,\Delta t' \end{aligned}$$

Das ist genau die Zeitdilatationsgleichung (6).

Natürlich muss die Lorentz-Rück-)Transformation auch die Information enthalten, dass sich die Zeitdilatation umdreht, wenn das S-System mit dem S'-System vertauscht wird.

Nun sollen also im S-System am gleichen Ort (x, y, z) zu den Zeiten t_1 und t_2 zwei Ereignisse E_1 und E_2 geschehen. Ihr zeitlicher Abstand im S'-System berechnet sich, indem man zweimal die erste Zeile der Lorentz-Transformation (4) nimmt und subtrahiert:

$$\begin{aligned} c\,\Delta t' = c(t'_2 - t'_1) = ct'_2 - ct'_1 &= \gamma\,(ct_2 - \beta x) - \gamma\,(ct_1 - \beta x) \\ &= \gamma\,(ct_2 - ct_1 - \beta x + \beta x) = \gamma \cdot c\,(t_2 - t_1) = \gamma \cdot c\,\Delta t \\ \Leftrightarrow \qquad \Delta t' &= \gamma\,\Delta t \end{aligned}$$

Ein im S-System ruhender Vorgang (E_1 und E_2 am selben Ort) benötigt im S'-System also mehr Zeit als im S-System.

Vorbemerkung zu Längen: Auch bei Längen resp. Strecken war unsere bisherige Notation etwas salopp – nicht ganz so salopp wie bei den Zeitspannen, denn immerhin haben wir die Längen bei der Herleitung der Längenkontraktion mit ℓ resp. ℓ' angeschrieben und nicht etwa mit x resp. x'. Dennoch ist eine Strecke eigentlich die Differenz zweier Orte, also

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad .$$

Wir nehmen zur Kenntnis, dass die Differenz zweier Orte mit Ortsvektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ im dreidimensionalen Raum eigentlich ein Vektor $\Delta\vec{r}$ vom ersten zum zweiten Ort ist. In Komponenten bedeutet dies gemäss den Regeln der Vektorsubtraktion:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

Wenn wir uns auf Strecken längs der x-Achse einschränken – und nur diese werden allenfalls längenkontrahiert bei Standardorientierung der Bezugssysteme – so geht es uns nur um die x-Komponente, also um

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad .$$

Dem entsprechend lautet die präzisere Schreibweise für die Längenkontraktion:

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma} \tag{7}$$

In Worten: Die Strecke $\Delta x'$ zweier im S'-System gleichzeitig, aber an verschiedenen Orten x_1 und x_2 stattfindenden Ereignisse E_1 und E_2, wird aus Sicht des S-Systems auf die Distanz $\Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma}$ gestaucht.

Längenkontraktion: Explizit zu zeigen, dass die Lorentz-Transformationsgleichungen (4) und (5) die Längenkontraktion (7) beinhalten, delegieren wir an eine Übungsserie. . .