EF Physik: Prüfung Spezielle Relativitätstheorie – Lösungen

1. *Wettrennen im Weltraum (3 Punkte)*

   (a) Aus der Sicht der Erde erhalten wir für die Geschwindigkeit von Raumschiff B gemäss der klassischen Rechnung (S' = System von RS A): (1 P)

   $$u_\mathrm{B} = v + u_{\mathrm{B}'} = \frac{4}{5}\,c - \frac{1}{4}\,c = \frac{16-5}{20}\,c = \frac{11}{20}\,c = 0.55c < 0.6c = \frac{3}{5}\,c = u_\mathrm{C}$$

   Klassisch wäre RS B somit langsamer als RS C und würde von diesem eingeholt.

   (b) Relativistische Rechnung: (2 P)

   $$u_\mathrm{B} = \frac{v + u_{\mathrm{B}'}}{1 + \frac{v \cdot u_{\mathrm{B}'}}{c^2}} = \frac{\frac{11}{20}\,c}{1 - \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}} = \frac{\frac{11}{20}\,c}{\frac{4}{5}} = \frac{11}{20}\,c \cdot \frac{5}{4} = \frac{11}{16}\,c = 0.6875c > 0.6c = \frac{3}{5}\,c = u_\mathrm{C}$$

   Relativistisch ist umgekehrt RS B schneller als RS C und lässt dieses somit hinter sich.

2. *Relativistische Behauptung: "Reisende leben länger!" (2 Punkte)*

   Die Behauptung ist insofern **falsch**, als dass der Reisende selber die Zeit stets gleich erlebt. Er gewinnt durch das Reisen keine Lebenszeit, die er z.B. für ausgiebigeres Physiklernen verwenden könnte. (1 P)

   Die Behauptung ist insofern **richtig**, als dass eine Person, die ständig in einem Inertialsystem mehr oder weniger ruht, schneller altert, als eine reisende Person, die aus der Sicht dieses Inertialsystems eine Reise unternimmt, also wegreist und später wieder zurückkommt. Bei der Rückkehr wird die reisende Person im Vergleich mit der zuhause gebliebenen tatsächlich jünger sein (Zwillingsparadoxon, Zeitdilatation). (1 P)

3. *Kosmische Müonen (5 Punkte)*

   (a) Im Erdsystem benötigt das Müon zur Durchquerung der Erdatmosphäre der Dicke $h = 12\,\mathrm{km}$ eine Zeitspanne t von: (1 P)

   $$t = \frac{h}{v} = \frac{h}{\beta c}$$

   Im Eigensystem des Müons vergeht aufgrund der Zeitdilatation weniger Zeit, nämlich: (1 P)

   $$t = \gamma \cdot t' \quad \Leftrightarrow \quad t' = \frac{t}{\gamma} = \frac{\frac{h}{\beta c}}{\gamma} = \frac{h}{\beta c \gamma}$$

   Nun muss diese Laufzeit t' gleich der mittleren Lebensdauer des durchschnittlichen Müons sein, damit es den Erdboden gerade noch erreicht: $t' = 1.5\,\mu\mathrm{s}$.

   Das bedeutet, wir kennen h und t' und müssen die Geschwindigkeit β herausfinden: (2 P)

   $$t' = \frac{h}{\beta c \gamma} = \frac{h}{\beta c \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}} = \frac{h\sqrt{1-\beta^2}}{\beta c} \quad \Rightarrow \quad t'^2 = \frac{h^2\left(1-\beta^2\right)}{\beta^2 c^2} \quad \Leftrightarrow \quad \beta^2 c^2 t'^2 = h^2 - h^2\beta^2$$

   $$\Leftrightarrow \quad \beta^2 c^2 t'^2 + h^2\beta^2 = h^2 \quad \Leftrightarrow \quad \beta^2\left(c^2 t'^2 + h^2\right) = h^2 \quad \Leftrightarrow \quad \beta^2 = \frac{h^2}{(ct')^2 + h^2}$$

   $$\Leftrightarrow \quad \beta = \frac{h}{\sqrt{(ct')^2 + h^2}} = \frac{12\,000\,\mathrm{m}}{\sqrt{(c \cdot 1.5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s})^2 + (12\,000\,\mathrm{m})^2}} = 0.9993$$

   Die Müonen müssen also mit $99.93\,\%$ der Lichtgeschwindigkeit unterwegs sein.

   (b) Aus der Sicht des Müons ist die zu durchquerende Erdatmosphäre längenkontrahiert. Somit schafft es das Müon trotz der kürzeren Lebensdauer diese Strecke zurückzulegen. (1 P)

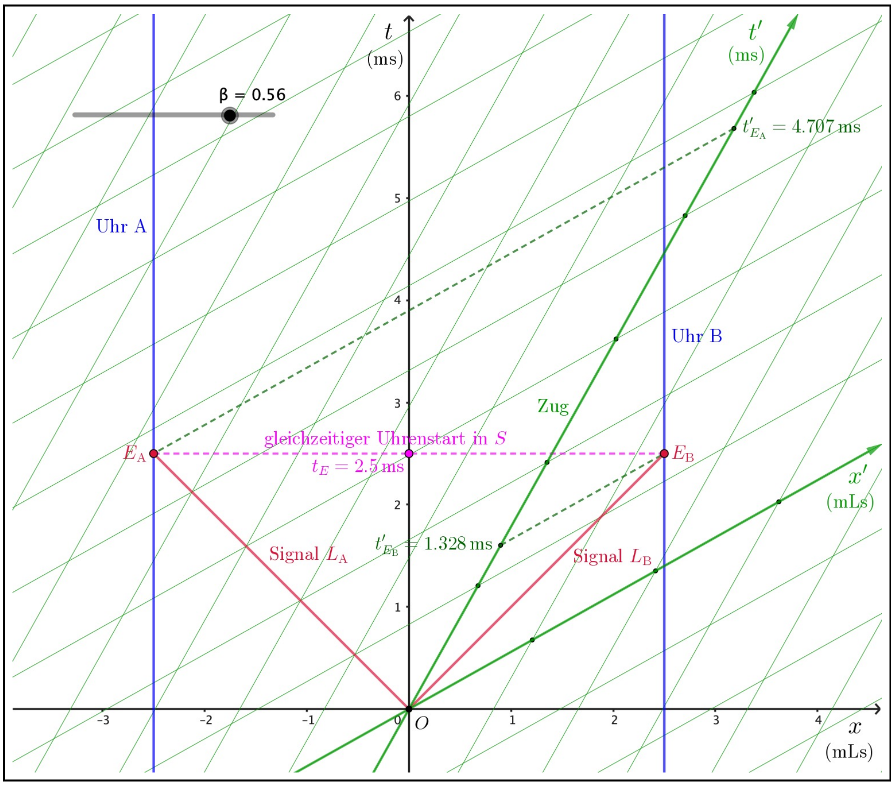
4. *Relativistische Uhrensynchronisation (10 Punkte)*

(a) Bei der Verschiebung von x_A nach x_B muss die Uhr B zwangsläufig bewegt werden. Egal, wie langsam dies geschieht, während der Bewegung läuft die Uhr B langsamer als die Uhr A. Damit ist die Synchronisation im Ruhesystem S der Uhren zunichte gemacht. (1 P)

(b) Zunächst rechnen wir die Strecke $750\,\mathrm{km}$ in Millilichtsekunden mLs um: (1.5 P)

$$1\,\mathrm{mLs} = 1 \cdot \frac{1}{1000} \cdot c \cdot \mathrm{s} = 1 \cdot \frac{300\,000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}}{1000} \cdot \mathrm{s} = 300\,\mathrm{km} \quad \Rightarrow \quad 750\,\mathrm{km} = 2.5\,\mathrm{mLs}$$

Hier das ausgefüllte Minkowski-Diagramm für die ganze Aufgabe:



Wir sehen, wie die beiden Signale L_A und L_B die Uhren A und B in den Ereignissen E_A und E_B im Uhrensystem S zum gleichen Zeitpunkt $t = 2.5\,\mathrm{ms}$ erreichen und diese somit synchron in Gang setzen (pinke Linie). (2 P)

(c) Wir müssen die Zeitkoordinaten der beiden Uhrenstartereignisse E_A und E_B im grünen Zugsystem anschauen. Dazu fahren wir den gestrichelten grünen Linien parallel zur x'-Achse bis zur t'-Achse nach. Ganz offensichtlich haben dort E_A und E_B nicht dieselbe Zeitkoordinate und finden damit im Zugsystem nicht gleichzeitig statt. (1 P)

(d) Zunächst bestimmen wir den Lorentzfaktor: (1 P)

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.56^2}} \approx 1.207$$

Da die Uhrenstartereignisse E_A und E_B in S je in $2.5\,\mathrm{mLs}$ Entfernung vom Ursprung stattfinden und durch einen vom Ursprung ausgehenden Lichtblitz gestartet werden, lauten ihre Koordinaten $(t_{E_\mathrm{A}}, x_{E_\mathrm{A}}) = (2.5, -2.5)$ und $(t_{E_\mathrm{B}}, x_{E_\mathrm{B}}) = (2.5, 2.5)$. (1 P)

Mittels Lorentztransformation erhalten wir die Zeitkoordinaten im Zugsystem S': (2 P)

$$t'_{E_\mathrm{A}} = \gamma\,(t_{E_\mathrm{A}} - \beta x_{E_\mathrm{A}}) \approx 1.207\,\big(2.5 - 0.56 \cdot (-2.5)\big) \approx 4.707\,\mathrm{ms}$$

$$t'_{E_\mathrm{B}} = \gamma\,(t_{E_\mathrm{B}} - \beta x_{E_\mathrm{B}}) \approx 1.207\,\big(2.5 - 0.56 \cdot 2.5\big) \approx 1.328\,\mathrm{ms}$$

Somit gibt es in S' eine Zeitdifferenz von $t'_{E_\mathrm{A}} - t'_{E_\mathrm{B}} \approx 3.379\,\mathrm{ms}$. (0.5 P)