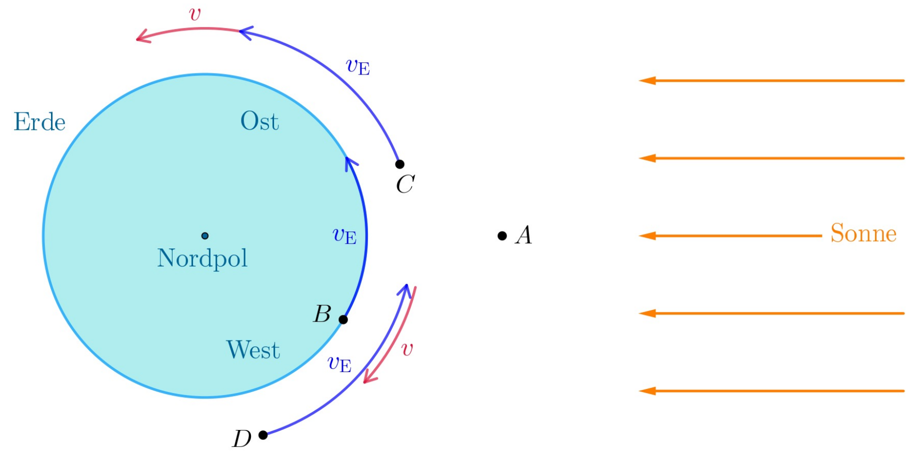
Das Hafele-Keating-Experiment (1971)

Dieser Text entstammt bis auf leichte textliche, grafische und formale Anpassungen dem Buch:
J. Freund: *Spezielle Relativitätstheorie für Studienanfänger*, vdf (2007).

1971 konnten die Zeitdilatationen, die von der Speziellen und von der Allgemeinen Relativitätstheorie vorhergesagt werden, experimentell in besonders überzeugender Weise demonstriert werden. Die sehr einfache Idee dazu hatten *Hafele* und *Keating*, die mit extrem genau gehenden *Atomuhren* in Linienflugzeugen in Äquatornähe *um die Erde flogen, und zwar einmal in Ostrichtung und einmal in Westrichtung*.



Für die Rechnung müssen jetzt zwei Geschwindigkeitsvariablen eingeführt werden: v_{E} ist die *Geschwindigkeit der Erddrehung* am Erdäquator ($40\,000\,\mathrm{km}$ in $24\,\mathrm{h} = 463\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$) und v die *Geschwindigkeit der Flugzeuge* mit den Atomuhren relativ zur Erde (ca. $800\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 222\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$). Insgesamt sind vier Bezugssysteme zu unterscheiden:

- A ist ein hypothetischer Beobachter, der sich relativ zur Erdoberfläche mit der Geschwindigkeit v_{E} nach Westen, also gegen die Erddrehung, bewegt. Für ihn steht die Sonne immer im Zenit, die Erde dreht sich unter ihm hindurch. Er befindet sich in einem *Inertialsystem*, da er nicht an einer Kreisbewegung um die Erdachse teilnimmt. Von der Bewegung der Erde um die Sonne sei abgesehen.
- B ist ein Beobachter am Boden. Er bewegt sich mit v_{E} relativ zu A.
- C ist ein Beobachter im Flugzeug auf Ostkurs. Er fliegt mit $v_{\mathrm{E}} + v$ relativ zu A.
- D ist ein Beobachter im Flugzeug auf Westkurs. Er fliegt mit $v_{\mathrm{E}} - v$ relativ zu A.

B, C und D befinden sich offensichtlich nicht in Inertialsystemen. Da die Spezielle Relativitätstheorie nur für Inertialsysteme gilt, **müssen wir die Rechnung im System von A durchführen!**

Wir idealisieren die Situation zunächst, indem wir annehmen, dass beide Flugzeuge gleichzeitig bei B starten und nach einer Erdumrundung gleichzeitig wieder bei B ankommen. Im System von A dauern diese Flüge die Zeit t. Die von B, C und D registrierten Eigenzeiten τ_B, τ_C und τ_D hängen wie folgt mit t zusammen:

$$t = \frac{\tau_B}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{\mathrm{E}}}{c}\right)^2}} = \frac{\tau_C}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{\mathrm{E}}+v}{c}\right)^2}} = \frac{\tau_D}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{\mathrm{E}}-v}{c}\right)^2}}$$

Da sich die Ausdrücke unter den Wurzeln nur sehr wenig von 1 unterscheiden, können die Wurzeln als Taylorreihen geschrieben werden ($\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ für $|x| \ll 1$). Daraus folgt für die drei Eigenzeiten:

$$\tau_B = t\cdot\sqrt{1-\left(\frac{v_\mathrm{E}}{c}\right)^2} \approx t\cdot\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{v_\mathrm{E}}{c}\right)^2\right)$$

$$\tau_C = t\cdot\sqrt{1-\left(\frac{v_\mathrm{E}+v}{c}\right)^2} \approx t\cdot\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{v_\mathrm{E}+v}{c}\right)^2\right)$$

$$\tau_D = t\cdot\sqrt{1-\left(\frac{v_\mathrm{E}-v}{c}\right)^2} \approx t\cdot\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{v_\mathrm{E}-v}{c}\right)^2\right)$$

Wir berechnen daraus die Differenz zwischen der im Flugzeug auf Ostkurs und der am Boden verstrichenen Eigenzeit zu:

$$\Delta\tau^\mathrm{Ost} = \tau_C - \tau_B \approx -\frac{2v_\mathrm{E}v+v^2}{2c^2}\cdot t \qquad \text{und} \qquad \Delta\tau^\mathrm{West} = \tau_D - \tau_B \approx +\frac{2v_\mathrm{E}v-v^2}{2c^2}\cdot t$$

Die Flugzeuggeschwindigkeit soll $800\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 222\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ betragen; für die Flugdauer gilt dann:

$$t \approx \tau_B = \frac{40\,000\,\mathrm{km}}{800\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} = 50\,\mathrm{h} = 180\,000\,\mathrm{s}$$

Daraus berechnet sich $\Delta\tau^\mathrm{Ost} = -255\,\mathrm{ns}$ und $\Delta\tau^\mathrm{West} = +156\,\mathrm{ns}$. Beim *Ostflug* verstreicht die Zeit im Flugzeug *weniger schnell* als auf der Erde. Beim *Westflug* verstreicht sie im Flugzeug dagegen *etwas schneller*. Dies liegt daran, dass aus Sicht des hypothetischen Inertialbeobachters A das nach Westen fliegende Flugzeug eine kleinere Geschwindigkeit hat als der Erdbeobachter B.

An dieser Stelle kommt aber noch eine größere Korrektur aus der *Allgemeinen Relativitätstheorie* hinzu: Diese sagt nämlich vorher, dass der Zeitverlauf auch vom *Gravitationspotential* abhängig ist, und zwar derart, dass die Zeit umso langsamer abläuft, je tiefer sich eine Uhr im Gravitationstrichter einer Masse befindet. Da ein Flugzeug näherungsweise in $10\,000\,\mathrm{m}$ Höhe fliegt, verstreichen im Flugzeug im Verlaufe von $50\,\mathrm{h}$ etwa $196\,\mathrm{ns}$ mehr als am Boden, sodass gilt:

$$\Delta\tau^\mathrm{Ost} = -255\,\mathrm{ns} + 196\,\mathrm{ns} = -59\,\mathrm{ns} \qquad \text{und} \qquad \Delta\tau^\mathrm{West} = +156\,\mathrm{ns} + 196\,\mathrm{ns} = +352\,\mathrm{ns}$$

Bei genauer Kenntnis der Flugdaten ergab sich beim Experiment von Hafele und Keating rechnerisch:

$$\Delta\tau^\mathrm{Ost} = (-40 \pm 23)\,\mathrm{ns} \qquad \text{und} \qquad \Delta\tau^\mathrm{West} = (+275 \pm 21)\,\mathrm{ns}$$

Gemessen wurden mit vier Atomuhren die Werte

$$\Delta\tau^\mathrm{Ost} = (-59 \pm 10)\,\mathrm{ns} \qquad \text{und} \qquad \Delta\tau^\mathrm{West} = (+273 \pm 7)\,\mathrm{ns}$$

Theorie und Experiment stimmen also ausgezeichnet überein.